



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANIC, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

NAPJATOSTNÍ, DEFORMAČNÍ A BEZPEČNOSTNÍ ANALÝZA RÁMU TANDEMOVÉHO JÍZDNÍHO KOLA

STRESS, DEFORMATION AND SAFETY ANALYSIS OF THE TANDEM
BICYCLE FRAME

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MARTIN PROFOTA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. JAN VRBKA, DrSc., dr. h. c.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Martin Profota

který/která studuje v bakalářském studijním programu

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Napjatostní, deformační a bezpečnostní analýza rámu tandémového jízdního kola

v anglickém jazyce:

Stress, deformation and safety analysis of the tandem bicycle frame

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Výpočtová napjatostní, deformační a bezpečnostní analýza rámu tandémového jízdního kola pro vybrané charakteristické provozní zatěžné stavy využitím přístupů prosté pružnosti. Tvorba vhodného rovinného výpočtového modelu. Případný návrh konstrukčních úprav.

Cíle bakalářské práce:

Výpočet a posouzení poddajnosti a bezpečnosti rámu tandémového jízdního kola při vybraných typických provozních zatěžných stavech. Získání praktických výpočtářských zkušeností. Případné porovnání s výsledky získanými pomocí Metody konečných prvků (MKP) systémem Ansys či jiným.

Seznam odborné literatury:

Janiček,P.,Ondráček,E.,Vrbka,J.,Burša,J.: Mechanika těles. Pružnost a pevnost I. CERM, 2004

Gere,J.M.,Timoshenko,S.P.: Mechanics of materials. Chapman and Hall, London, 1995

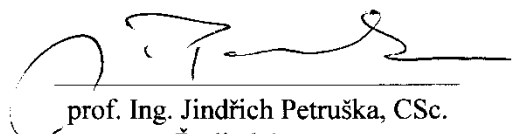
Hoschl,C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL Praha, 1971

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c.

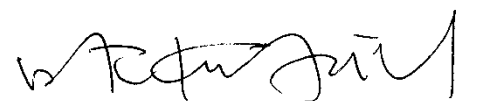
Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/14.

V Brně, dne 11.11.2013

L.S.



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu



prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan

ABSTRAKT

Cílem této práce bylo posouzení bezpečnosti a poddajnosti konstrukce rámu tandemového kola využitím prosté pružnosti pomocí výpočtové deformační a napěťové analýzy. Po seznámení s materiálem a geometrií rámu dvojkola je úvodní část věnována teoretickému základu výpočtu, jako prutové předpoklady, definice prutu, mezní stavy, Castiglianova věta a Saint-Venantův princip. Před zahájením samotného analytického řešení se převedla daná prostorová úloha na rovinnou a provedlo se celkové zjednodušení výpočtového modelu. Výpočet se týkal dvou zátěžných stavů vzájemně se odlišujících způsobem namáhání tandemového rámu. U každého zátěžového módu bylo umožněno srovnání s numerickým přístupem MKP. Při analytickém výpočtu se využilo matematických softwarů Mathcad 14 a Maple 13. Kontrola numerickým řešením proběhla v programu ANSYS Workbench 14.5.

KLÍČOVÁ SLOVA

Deformačně napěťová analýza, bezpečnost, prostá pružnost, rám tandemového kola, zatížení, ANSYS.

ABSTRACT

Purpose of this work was the evaluation safety and pliancy of the frame structure tandem bicycle using method of basic elasticity with the help of the deformation and stress analysis. After introduction material and geometry of the frame tandem bicycle introductory part is focused on theoretical basis of calculation like beam assumptions, definition the beam, limit states, Sentence of Castigliano and Saint-Venant's Principle. Before commencement actual analytical solution the spatial task was transferred to plane task and used model was simplified. Calculation related to two load states differing by way of load of frame tandem bicycle. For each load modes comparison with numerical solution by FEM was enabled. Mathematical software like Mathcad 14 and Maple 13 were used to analytical calculation. Check was performed by numerical solution in program ANSYS Workbench 14.5.

KEY WORDS

Stress strain analysis, safety, basic elasticity, tandem bicycle frame, load, ANSYS.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

PROFOTA, M. *Napjatostní, deformační a bezpečnostní analýza rámu tandemového jízdního kola*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 94 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Ing. Jan Vrbka, DrSc., dr. h. c..

PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Ing. Jana Vrbky, DrSc., dr. h. c. za použití uvedené odborné literatury.

V Brně dne 29. května 2014

.....
MARTIN PROFOTA

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Ing. Janu Vrbkovi, DrSc., dr. h. c. za poskytnutou odbornou pomoc, vstřícný osobní přístup a velmi cenné rady během tvorby této práce. Dále bych chtěl poděkovat panu Ing. Petru Šantavému z firmy No question bike za jeho ochotu a dodanou výkresovou dokumentaci s dalšími informacemi týkající se daného tandemového kola. Tímto bych chtěl také poděkovat své rodině za neustálou podporu a trpělivost po celou dobu mého studia.

OBSAH

ÚVOD.....	11
1. DVOJKOLO.....	12
1.1. Rám dvojkola.....	13
1.2. Materiál rámu.....	14
2. FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE ŘEŠENÍ.....	15
3. ZJEDNODUŠENÍ A TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU.....	16
4. TEORIE K REALIZACI VÝPOČTU.....	16
4.1. Prut v pružnosti a pevnosti.....	16
4.2. Prutové předpoklady.....	17
4.3. Saint-Venantův princip.....	19
4.4. Prizmaticnost prutu.....	20
4.5. Castiglianova věta.....	20
4.6. Namáhání.....	21
4.7. Mezní stavy.....	21
4.8. Využití MKP.....	23
5. ROZMĚRY A ZNAČENÍ PRUTOVÉ SOUSTAVY.....	23
6. ZAVEDENÍ GLOBÁLNÍHO SOUŘADNÉHO SYSTÉMU.....	24
7. PRVNÍ ZÁTĚŽNÝ STAV.....	24
7.1. Statický rozbor rámu dvojkola.....	26
7.2. Částečné uvolnění.....	27
7.3. Určení podmínek spojitosti deformace.....	28
7.4. Výsledné vnitřní silové účinky.....	29
7.5. Stanovení průřezových charakteristik.....	39
7.6. Výpočet VVÚ.....	40
7.7. Grafické znázornění průběhů VVÚ.....	52
7.8. Výpočet napětí.....	54
7.9. Určení bezpečnosti.....	55
7.10. Stanovení posuvu.....	56
7.11. Numerický přístup MKP.....	57
8. DRUHÝ ZÁTĚŽNÝ STAV.....	60
8.1. Statický rozbor rámu dvojkola.....	62

8.2.	Výsledné vnitřní silové účinky.....	64
8.3.	Výpočet VVÚ.....	73
8.4.	Grafické znázornění průběhů VVÚ.....	77
8.5.	Výpočet napětí.....	79
8.6.	Určení bezpečnosti	79
8.7.	Stanovení posuvu	80
8.8.	Numerický přístup MKP	82
9.	NÁVRH ÚPRAVY RÁMOVÉ KONSTRUKCE.....	84
10.	ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ	86
	ZÁVĚR.....	87
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	88
	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ.....	89
	SEZNAM OBRÁZKŮ	92
	SEZNAM TABULEK.....	94
	SEZNAM POUŽITÉHO SOFTWARE	94
	SEZNAM PŘÍLOH	94

ÚVOD

V dnešní době cyklistika patří ke třem neoblíbenějším sportům v České republice. Navíc cykloturistika, tedy rekreační cyklistika, je vůbec nejrozšířenější sportovní aktivitou obyvatel v naší zemi. Důvody lze hledat v jednoduchosti a ekonomické nenáročnosti tohoto sportu. Důkazem budiž velký každoroční nárůst prodeje ať už nových jízdních kol nebo jakýchkoliv jiných doplňků z oblasti cyklistiky, dále každoroční konání akce Bike Brno jako součást veletrhu Sportlife v Brně nebo pořádání nespočet každoročních bikemaratónů pro širokou veřejnost po celé České republice. Proto lze tuto aktivitu považovat za jedinečný český fenomén. Tudíž prodej jízdních kol skrývá nejen v naší republice, ale i na celém světě, obrovský potenciál. Z tohoto důvodu jde rychle dopředu i vývoj v oblasti cyklistiky a cykloturistiky. Za účelem ještě více rozšířit tento sport a zvýšit jeho oblíbenost u lidí přibýly ke klasickým silničním a horským kolům jejich další varianty, jakou jsou terénní koloběžky, tříkolky, lehokola a také tandemová kola neboli dvojkola.

Stejně jako u jakéhokoliv jiného sportu na světě, tak i zde zůstávají nejdůležitějšími faktory bezpečnost a spolehlivost. A právě kontrola bezpečnosti a pevnosti rámu horského tandemového kola je tématem mé bakalářské práce. Práce se tedy zaměřuje na deformačně napěťovou analýzu rámu dvojkola s konkrétním cílem posoudit nebezpečná místa, určit deformaci a stanovit součinitele bezpečnosti v nebezpečných místech při statickém zatížení.

Abychom mohli provést analytické řešení dané úlohy za přístupu prosté pružnosti, bylo zapotřebí reálný rám dvojkola zjednodušit a vytvořit za určitých předpokladů výpočtový model. Následovalo převedení geometrie výpočtového modelu rámu na rovinnou úlohu, tedy na úroveň prutové soustavy. Deformační, bezpečnostní a napěťová analýza proběhla pro dva vzájemně rozdílné zátěžné stavy. První zatěžovací stav spočívá v tom, že oba cyklisté sedí na svém dvojkole, které zůstává v klidu. Během druhého zátěžného stavu dvojice jezdců prudce brzdí ve stoje. Brzdění je realizováno pouze přední brzdou. Po analýze obou zmiňovaných zátěžných stavů, jsem provedl analytický výpočet za pomoci matematických programů. Na závěr byly výsledky z analytických výpočtů porovnány s výsledky získanými pomocí metody konečných prvků v programu ANSYS Workbench.

Práce má za obecný cíl aplikovat poznatky získané během studia k vyřešení tohoto problému. A však z důvodu modelového zjednodušení před výpočtem se výsledné hodnoty mohou od skutečnosti jistým způsobem odlišovat. Přesto zjištěné výsledky v rámci této práce mohou být využity k dalšímu zlepšování konstrukce rámu dvojkola.

1. DVOJKOLO

Tandemové kolo či tandem představuje označení pro jízdní kola, která jsou určena pro více osob. Nejčastěji se můžeme setkat s dvojkoly, tedy s jízdními koly pro dva jezdce. Stejně jako u běžných jízdních kol a lehokol je základním prvkem zachování jedné stopy. To znamená, že se jedná o klasický rám osazený dvěma koly a s posazením cyklistů za sebou. Raritu představuje dvojkolo s posazením jezdce vedle sebe. V tomto případě jde spíše jen o vzácnost a kutilskou legraci. Dá se říct, že dvojkola jsou stará jako kolo samo. Důkazem budiž fotografie prvních tandemů z období okolo roku 1880. I přes jejich dlouhou historii se u nás setkáváme s tandemovými koly či s dvojkoly jen výjimečně. V současné době se však nachází na území naší republiky řada výrobců tandemových kol a je jen otázkou času, kdy se jejich výskyt zvýší.

Velkou výhodou tandemových kol či dvojekol představuje jejich větší efektivita vůči obyčejným jízdním kolům. Během jízdy obou jezdce na tandemu má daná dvojice k dispozici dvojnásobek výkonu než osamocený cyklista na klasickém kole. Přitom nárůst vzdušného odporu oproti případu se samotným jezdce je minimální. Tudíž dvojice cyklistů na dvojkole má při jízdě z kopce podstatně vyšší rychlost. To samé se dá říct i o jízdě po rovině nebo do kopce, ale zde musí posádka synchronizovat svoji kadenci, tedy aby měli oba stejnou frekvenci šlapání. Jízda na dvojkole je tedy pro svou menší fyzickou náročnost vhodná pro jakoukoliv dvojici příznivců cyklistiky, ať už se jedná o partnerský pár, dva kamarády nebo třeba rodič s dítětem. Dvojkolo může proměnit každému jeho osamělou cyklistiku ve společnou aktivitu plnou zábavy, radosti a skvělých zážitků.



Obr. 1: Tandemové kolo Active MTB 29 značky NO QUESTION [1]

Výchozím modelem tandemového jízdního kola, z jehož parametrů se v této práci vycházelo, bylo dvojkelo Active MTB 29 značky No question [6]. Tohle horské dvojkelo se skládá z 19 palcového rámu osazeno stále více populárními 29 palcovými koly o zesílených ráfcích. Tandem je vybaven pevnou přední vidlicí a hydraulickými kotoučovými brzdami pro dostatečnou brzdnou účinnost. Výrobci tandemových jízdních kol navíc doporučují, že pokud celková hmotnost posádky překračuje hodnotu 160 kg, mělo by být dvojkelo vybaveno právě hydraulickými kotoučovými brzdami, neboť klasické „V“ brzdy nemají v tomto případě už dostatečnou účinnost. Lze si na obrázku č. 1 všimnout, že ostatní komponenty jsou stejné jako u běžných jízdních kol. Vpředu sedící jezdec má k dispozici ovládání jak přesmykače, tak zadního měniče či přehazovačky. Taktéž může brzdit přední brzdou. Řídítka druhého jezdce vybavena pouze brzdovou páčkou od zadní brzdy drží představec připevněný na sedlové trubce prvního jezdce. Výhodu tohoto dvojkola představují už předem zmiňovaná 29 palcová kola, která umožňují dvojici cyklistů vyvinout podstatně vyšší rychlost oproti běžným horským kolům a také vytváří pro oba jezdce větší komfort a pohodlí při jízdě v terénu, neboť tyto větší kola si lépe poradí s přejížděním nerovností než více známá 26 palcová kola. Proto je tohle dvojkelo vhodné na jakékoliv cesty.

1.1. Rám dvojkola

Předmětem deformační a pevností analýzy je zcela určitě nejvíce namáhaný prvek tandemového kola, a to právě rám. Jedná se o část konstrukce dvojkola, která nese největší podíl váhy lidského těla. Rám tvoří svarová konstrukce složená z jednotlivých trubek o mezikruhovém průřezu. Jelikož hovoříme o svařované konstrukci, je zapotřebí zhodnotit i svarová místa, protože tato místa představují tepelně ovlivněné oblasti, kde vznikají následkem nárůstu tepla při svařování vnitřní pnutí neboli koncentrace vnitřního napětí v materiálu. Abychom mohli aplikovat znalosti a výpočetní postupy při analytickém řešení získané z předcházejícího studia, bylo nutné konstrukci rámu mírně změnit. Konkrétně bylo upraveno vyztužení u sedlové trubky prvního jezdce.



Obr. 2: 3D vizualizace upraveného rámu tandemového jízdního kola

1.2. Materiál rámu

Trubky, z nichž je daný rám dvojkola svařen, byly vyrobeny z materiálu EN AW-7020 T6. Jedná se o slitinu hliníku s konkrétním složením AlZn4.5Mg1 . Tyto tepelně zpracované slitiny na bázi Al-Zn-Mg jsou nejpevnější ze všech hliníkových slitin. Hlavní přísadový prvek zastupuje zinek a sekundární legující prvek představuje hořčík, jehož obsah ovlivňuje pevnost po vytvrzení. Slitina EN AW-7020 díky obsahu legujících prvků má velmi dobrou svařitelnost. Trubky se z tohoto materiálu vyrábí tažením, po kterém je nutné tyto trubky tepelně upravit. To se děje formou rozpouštěcího žíhání pro uvolnění vnitřního pnutí s následným přirozeným stárnutím. Jedná se tedy o tzv. dvoustupňové žíhání. Přirozené stárnutí probíhající za pokojové teploty vytváří proces vytvrzování slitiny EN AW-7020 T6, který je pro stavbu rámu dvojkola nesmírně důležitý. Tímto získává daný materiál unikátní schopnost, jež spočívá v návratnosti původních mechanických vlastností garantovaných normou po tepelném ovlivnění během svařování rámu. To má za následek, že se zhruba po 3 až 4 týdnech okolí sváru samovolně vytvrdí a tím dojde k vyrovnání vnitřního pnutí v oblasti svaru. Tedy po uplynutí přibližně jednoho měsíce by měl výsledný svařený rám tandemového kola nabýt 100% původní pevnosti a to jen při teplotě okolí. Z tohoto důvodu později volím součinitel koncentrace napětí $\alpha = 2$. Tento jev zaručí konečnému rámu vysokou pevnost, tuhost a vzhledem k tomu, že se jedná o slitinu hliníku, taky

nízkou hmotnost. Ve srovnání s běžnou slitinou hliníku EN AW-6061 T6, ze které je vyrobena řada rámu horských i silničních kol, dosahuje tato slitina EN AW-7020 T6 mnohem vyšších pevnostních hodnot, jako vyšší mez pevnosti a smluvní mez kluzu. Navíc běžná slitina hliníku EN AW-6061 T6 potřebuje po svaření tepelnou úpravu umělým stárnutím, což je energetický a časově velmi náročné. Díky těmto skvělým vlastnostem materiálu EN AW-7020 T6 umožňuje rám dvojkola dokonalé přenesení síly do pedálu a následně na kola. Zmíněný materiál můžeme považovat za lineárně pružný a homogenní, tedy za tzv. Hookovský materiál. Z tohoto důvodu lze k výpočtu použít lineární pružnost a pevnost. Níže jsou uvedeny základní mechanické a fyzikální vlastnosti daného materiálu.

Základní mechanické vlastnosti materiálu EN AW-7020 T6:

Mez pevnosti	$R_m > 350 \text{ MPa}$
Mez kluzu	$R_{p0,2} > 280 \text{ MPa}$
Tažnost	$A_5 > 10 \%$

Základní fyzikální vlastnosti materiálu EN AW-7020 T6:

Hustota	$\rho = 2780 \text{ kgm}^{-3}$	
Součinitel tepelné roztažnosti (20 - 100 °C)	$\alpha = 23,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	
Součinitel tepelné vodivosti (T6, 20 °C)	$\lambda = 137 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	
Modul pružnosti v tahu	$E = 72 \text{ GPa}$	
Modul pružnosti ve smyku	$G = 27 \text{ GPa}$	
Poissonovo číslo	$\mu = 0,33$	[2, 9]

2. FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE ŘEŠENÍ

Základním úkolem bakalářské práce je provést deformačně napěťovou analýzu rámu tandemového jízdního kola. Po celkovém zjednodušení a vytvoření výpočtového modelu rámu dvojkola bude zmíněná analýza probíhat následovně: definice zatěžovacích stavů, statický rozbor samotného rámu dvojkola a následné zjištění reakčních sil z rovnic statické rovnováhy, dále stanovení a vykreslení průběhů výsledných vnitřních účinků, výpočet napětí v nebezpečných místech a určení celkového součinitele bezpečnosti tandemového rámu vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Ve vybraných místech konstrukce bude vypočten také posuv v daném směru.

Všechny zmíněné výpočty budou realizovány ve dvou variantách pro různé způsoby namáhání. V prvním případě oba cyklisté sedí na dvojkole, které je v klidu. Během druhého zátěžného stavu dvojice jezdců prudce brzdí ve stoje přední brzdou. Avšak obě zatížení budou uvažována jako statická. U každého zátěžného stavu proběhne srovnání analytického výpočtu s numerickým řešením v programu ANSYS Workbench 14.5.

Tato práce má za cíl pomocí výše uvedené analýzy určit kritická místa rámu dvojkola a jejich případnou úpravou zvýšit bezpečnost konstrukce.

3. ZJEDNODUŠENÍ A TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU

K řešení stavů napjatosti v rámu dvojkola lze využít metody konečných prvků a to hlavně u komplikovaných tvarových částí rámu. Pokud bychom však chtěli řešit daný problém analyticky využitím prosté pružnosti, je třeba provést několik zjednodušení a také musí dojít k vyslovení určitých předpokladů. Metodu MKP jsem poté použil pouze pro srovnání výsledků.

Za první zjednodušení lze považovat převedení prostorové úlohy na rovinnou. Pro analytický výpočet bylo stanoveno zanedbání rozdělení zadní konstrukce rámu, tedy dvě dvojice zadních trubek jsme nahradili jednou dvojicí o ekvivalentní tuhosti, přitom vnější průměr trubek zůstal zachován a změnila se jen tloušťka materiálu. Také jejich esovitě prostorové prohnutí bylo nahrazeno rovinnou variantou s mezikruhovými průřezy. Tohle zjednodušení zadní části konstrukce má zanedbatelný vliv na celkovou napjatost rámu dvojkola. Přesto se tato úprava projeví v menších posuvech v daném místě. Dále jsme stanovili, že osy trubek v místech středového složení a v místech spojnice horní rámové trubky a sedlových trubek se střetávají v jednom bodě. Rovněž byl zanedbán vliv patek středové trubky, různých návarků na rám a vliv vnitřních závitů v rámu pro přichycení košíků na lahve s pitím.

Po tomto celkovém zjednodušení tandemového rámu následovalo myšlené nahrazení jednotlivých trubek s mezikruhovým průřezem pruty. Každému prutu však byl přiřazen průřez odpovídající právě skutečnému průřezu jednotlivých trubek. Dále místa jejich spojitě změny jsme nahradili skokovou změnou průřezu v jejich polovině.

Všechny působiště sil byly určeny do míst průsečíků os či střednic prutů. Tímto zůstaly zanedbány koncové části rámu, jako konce sedlových trubek a přední hlavové trubky. V tomto případě se jedná o využití Saint-Venantova principu, který bude spolu s prutovými předpoklady vysvětlen níže.

4. TEORIE K REALIZACI VÝPOČTU

S ohledem na to, že jsme celou konstrukci rámu převedly na tzv. prutovou soustavu, je zapotřebí představit pár pojmů.

4.1. Prut v pružnosti a pevnosti

Pružnost a pevnost (PP) si dává za hlavní cíl řešit problémy spojené s napjatostí, deformací a porušování součástí technických objektů. V realitě jsou však tyto objekty téměř vždy tvarově složité. Analytické řešení vybraných těles bylo a stále je možné pouze při použití určitých omezujících předpokladů.

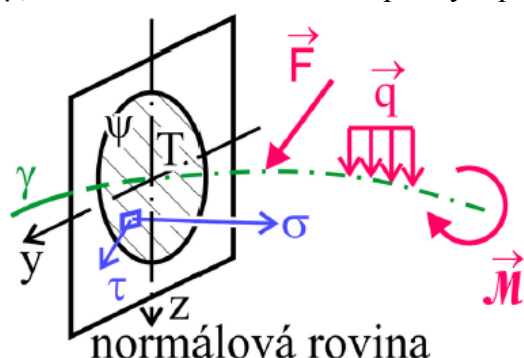
Prut se označuje za nejjednodušší teoretický model reálného tělesa, které musí splňovat jisté geometrické, vazbové, zatěžovací, deformační a napjatostní předpoklady, které jsou souhrnně nazývány jako prutové předpoklady.

4.2. Prutové předpoklady

Zde jsou uvedeny prutové předpoklady [3], kterými je prut charakterizován.

Předpoklady geometrické

„Prut je určen střednicí γ , a v každém bodě střednice příčným průřezem ψ .“



Obr. 3: Vždy kolmý průřez na střednici [4]

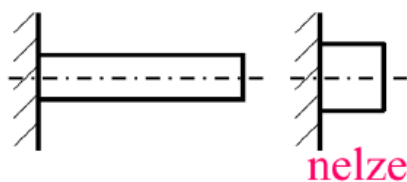
„Střednice γ je spojitá a hladká křivka konečné délky.“



Obr. 4: Nehladká křivka [4]

„Příčný průřez je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá oblast, ohraničená obrysem a charakterizovaná charakteristikami příčného průřezu.“

„Délka střednice je řádově minimálně stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu.“

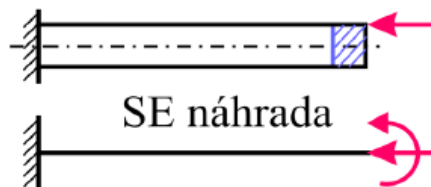


Obr. 5: Rozdílná délka střednice [4]

Předpoklady vazbové a zatěžovací

„Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice“

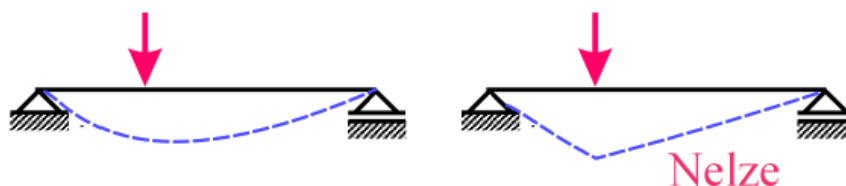
„Zatížení je soustředěno na střednici, tj. silovým působením na prut jsou osamělé a liniové síly a silové dvojice s působištem na střednici.“



Obr. 6: Staticky ekvivalentní náhrada [4]

Předpoklady deformační

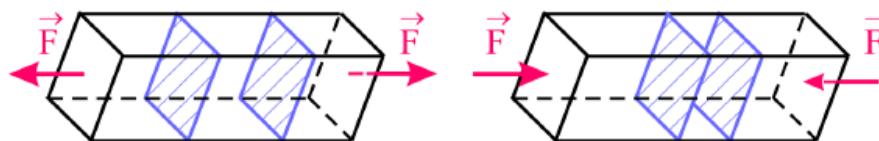
„Střednice prutu zůstává v procesu deformace spojitá a hladká.“



Obr. 7: Hladkost střednice po zatížení [4]

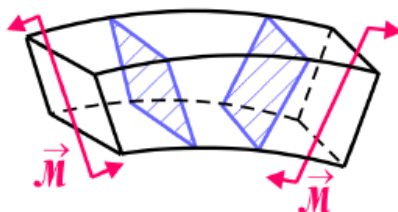
„Příčné průřezy zůstávají v průběhu deformace zase příčnými průřezy. Tedy zachovávají si rovinnost a kolmost k deformované střednici. Příčné průřezy se podle charakteru zatěžování:

- vzájemně oddalují (tah), respektive přibližují (tlak)



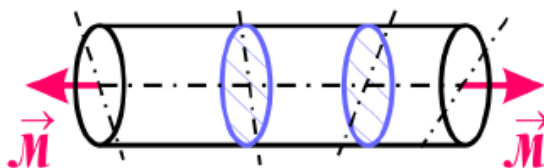
Obr. 8: Tah / Tlak [4]

- natáčí se kolem osy ležící v příčném průřezu a deformují se (ohyb)



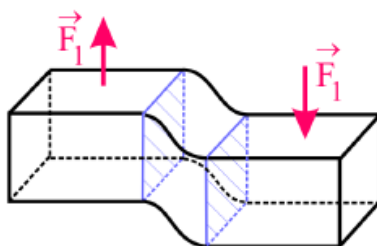
Obr. 9: Ohyb [4]

- natáčejí se kolem osy kolmé k příčnému průřezu a nedeformují se (krut)



Obr. 10: Krut [4]

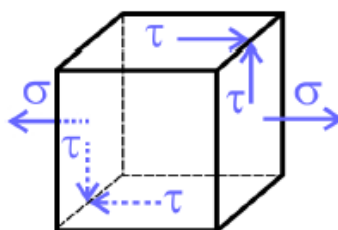
- posouvají se bez deformace (smyk)“



Obr. 11: Smyk [4]

Předpoklady napjatostní

„Napjatost v prutu je určena normálovým a smykovým napětím v příčném průřezu. Jedná se o zvláštní typ napjatosti, kterou můžeme nazvat prutovou napjatostí.“



Obr. 12: Prutová napjatost - pouze smykové a normálové napětí [4]

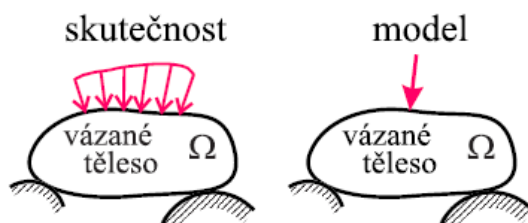
4.3. Saint-Venantův princip

Důležitým prvkem, který bude při řešení daného problému využíván je Saint-Venantův princip. Jelikož v praxi obvykle neznáme skutečné rozložení vnějších sil působících na námi řešené těleso, musíme nahradit reálné silového působení zjednodušeným silovým modelem. Může se tak jednat např. o:

- osamělou sílu
- silovou dvojici
- lineární liniové zatížení
- plošné zatížení, apod.

V pružnosti a pevnosti Saint-Venantův princip vysvětluje následující věta:

„Nahradíme-li v určité oblasti tělesa jednu silovou soustavu jinou, staticky ekvivalentní soustavou, pak napjatost tělesa je pro obě zatížení prakticky stejná s výjimkou blízkého okolí oblasti náhrady, jehož rozměry jsou srovnatelné s rozměry této oblasti.[4]“



Obr. 13: Staticky ekvivalentní náhrada vnějšího silového působení [4]

4.4. Prizmaticčnost prutu

Pro PP se prismatický prut definuje jako prut, jehož příčný průřez je po délce střednice konstantní, tedy zůstává nezměněn. Pokud se příčný průřez mění, dochází k růstu smykových napětí a k deformaci příčného průřezu. Z tohoto důvodu příčné řezy nezůstávají rovinnými a kolmými ke střednici a neplatí tedy Euler-Bernoulliho teorie.

4.5. Castiglianova věta

K výpočtu neznámých vazebných sil v prutech z podmínek spojitosti deformace nebo ke zjištění posuvu v daném směru se využívá Castiglianova věta, která dle PP zní:

Působí-li na lineárně pružné těleso (soustavu) silová soustava, pak posuv u_j působíště síly F_j po její nositelce je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této síly.

$$u_j = \frac{\partial W}{\partial F_j} \quad (1)$$

Úhel natočení φ_j přímky spojené s působíštěm silové dvojice M_j v rovině jejího působení je dán parciální derivací celkové energie napjatosti tělesa (soustavy) podle této dvojice.

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j} \quad (2)$$

4.6. Namáhání

Jelikož během výpočtu neznámých vazebných sil v prutech z podmínek spojitosti deformace pomocí Castiglianovy věty je do energie napjatosti zahrnuta pouze energie od ohybového namáhání a od namáhání na tah a tlak, definujme si proto oba tyto typy namáhání.

Namáhání na tah a tlak

Prostým tahem či tlakem označujeme namáhání přímého prizmatického prutu, jsou-li splněny následující podmínky [8]:

- „platí obecné prutové předpoklady
- příčné průřezy se vzájemně oddalují nebo přibližují, přičemž zůstávají rovinnými a kolmými ke střednici. Střednice zůstává přímková
- jedinou nenulovou složku VVÚ představuje normálová síla N “

Namáhání na ohyb

Prostým ohybem lze nazvat namáhání přímého prizmatického prutu, pokud je opět splněno následující [8]:

- „platí obecné prutové předpoklady
- příčné průřezy zůstávají v průběhu zatěžování rovinnými a otáčejí se kolem osy ležící v této rovině a následovně se deformují. Příčné průřezy zůstávají kolmé ke zdeformované či prohnuté střednici
- jedinou nenulovou složkou VVÚ je ohybový moment M_o k určité ose“

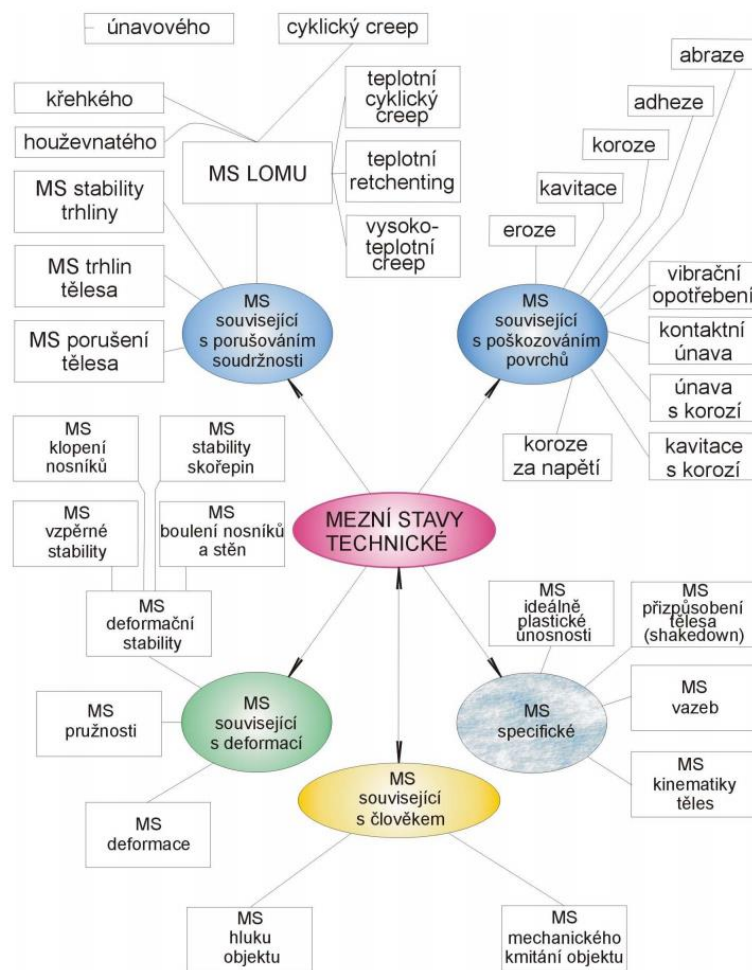
4.7. Mezní stavy

Pod pojmem mezní stav si lze představit stav, při kterém dochází ke změně charakteristické vlastnosti tělesa, kdy například těleso zcela ztrácí svou schopnost plnit některou z požadovaných funkcí.

Soubor vybraných mezních stavů můžeme vidět na obr. 14. Následně jsou zmíněné pouze ty podstatné pro tuto práci.

Mezní stav deformace

„Mezní stav deformace tělesa je takový jeho stav, ve kterém se deformace funkčně přípustné mění na deformace funkčně nepřípustné.[3]“ Jedná se tedy o stav, po jehož překročení dané těleso ztrácí svoji funkční způsobilost.



Obr. 14: Přehled mezních stavů [5]

Mezní stav pružnosti

„Mezní stav pružnosti tělesa je takový jeho stav, při jehož překročení vznikají v tělese viditelné plastické deformace.[3]“ Z toho vyplývá, že po odlehčení vnějšího zatížení zůstane těleso i nadále v deformovaném stavu.

Mezní stav deformační stability

„Mezní stav deformační stability tělesa je takový jeho stav, kdy geometrická konfigurace, která byla stabilní před dosažením mezního stavu, se po jeho překročení stává labilní, přičemž se stabilní stává zase jiná geometrická konfigurace tělesa.[3]“

Mezní stav porušení

„Mezním stavem porušení rozumíme takový zatěžovací stav tělesa, při kterém dojde k porušení jeho spojitosti tak, že příslušná konstrukce nemůže plnit stanovenou funkci.[4]“

4.8. Využití MKP

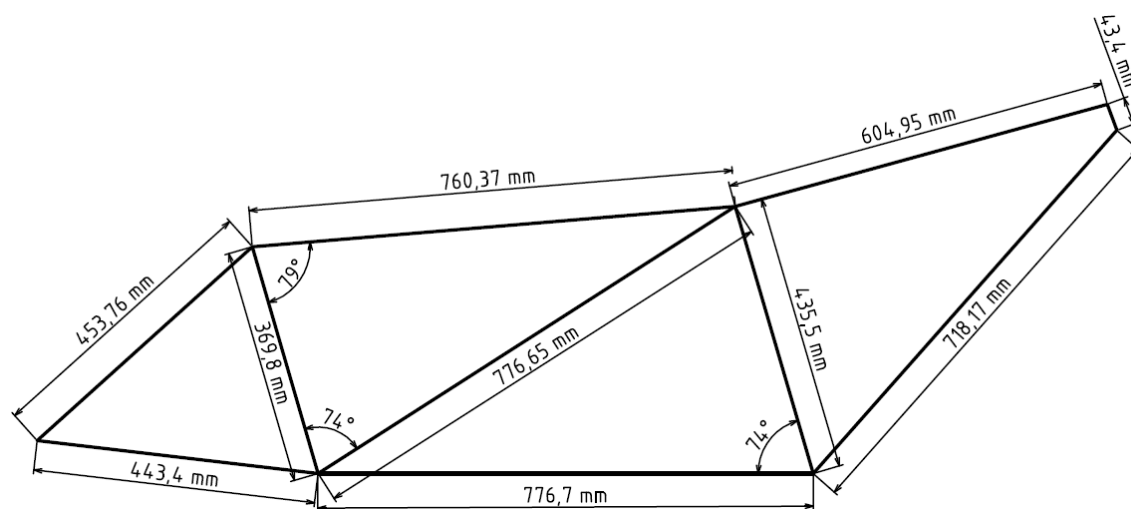
Metoda konečných prvků je v současné době nejvíce používanou výpočtovou metodou hlavně díky své rychlosti výpočtu. Jedná se o numerický způsob simulace fyzikálních jevů. Tento přístup slouží například k řešení deformační a napěťové analýzy těles, dále k výpočtu proudění tekutin, zjištění vlastních frekvencí a podobně. Ačkoliv historie této metody sahá až do 50. let 20. století a tudíž princip výpočtu je již dlouhou dobu znám, teprve až s rozvojem výpočetní techniky našla tato metoda své praktické uplatnění. V současné době existuje a neustále se vyvíjí řada programů na bázi MKP. Nejpopulárnějším softwarem z této skupiny programů se stává ANSYS¹, který si velmi dobře umí poradit s řešením lineárních úloh. Prostřednictvím tohoto programu lze také řešit i nelineární úlohy, u kterých však může nastat problém s konvergencí daných úloh. V našem případě analýzu rámu tandemového jízdního kola tvoří pouze lineární úlohy.

Existuje několik typů výpočtů, kterým je například výpočet pomocí prutového prvku BEAM188 či objemový prvek SOLID186. Jelikož rám dvojkola byl v této práci převeden na prutovou soustavu, budou výsledky z analytického výpočtu porovnány s numerickým řešením, kde byl využit právě prvek BEAM188.

Prvek BEAM188 se stává vhodným, pokud chceme řešit prutové konstrukce. Jedná se o lineární nebo kvadratický dvou-uzlový prvek ve 3D. Má šest nebo sedm stupňů volnosti na každém uzlu. Tvoří je translace ve směru osy x, y a z a následná rotace okolo nich. Sedmý stupeň volnosti bývá volitelný a využívá se pro velké rotace nebo nelineární úlohy.

5. ROZMĚRY A ZNAČENÍ PRUTOVÉ SOUSTAVY

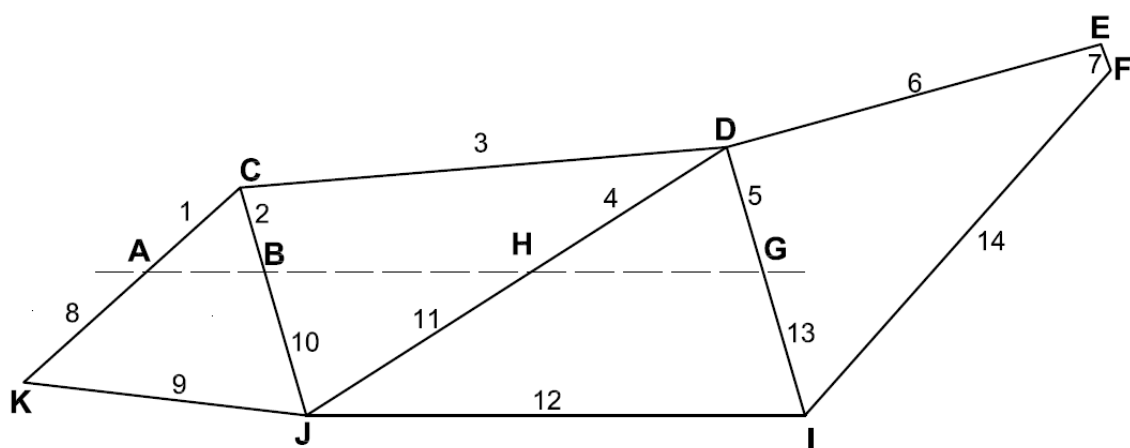
Výpočty v této bakalářské práci budou vycházet z následujících rozměrů prutové soustavy.



Obr. 15: Rozměry prutové soustavy

¹ Program ANSYS Workbench 14.5; ANSYS Inc.

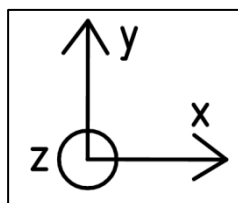
Značení všech prutů a jejich částí dle obr. 16 je jednotné pro všechny výpočty.



Obr. 16: Značení jednotlivých prutů a jejich spojů

6. ZAVEDENÍ GLOBÁLNÍHO SOUŘADNÉHO SYSTÉMU

Při určování rovnic statické rovnováhy u obou zátěžných stavů se bude používat výhradně kartézský souřadný systém s danou orientací podle obr. 17.



Obr. 17: Souřadný systém

7. PRVNÍ ZÁTĚŽNÝ STAV

Jedná se o klidový stav, kdy oba jezdci sedí na tandemovém kole a opírají se přitom o svá řídítka a šlapátka. Během daného zatížení ani jeden z cyklistů nešlape a dvojkolo stojí na místě. V tomto prvním případě na těžiště každého z nich působí svisle k zemi pouze gravitační síla a tím je potom jejich váha rozložena na řídítka, pedály a sedla. Při zatěžování jsou uvažováni dva jezdci o hmotnosti 120 kg a jejich tandemové kolo váží zhruba 17 kg. Pevnou přední vidlici dvojkola považujeme za ideálně tuhou část konstrukce, jež se v žádném případě nedeformuje a přenáší ohybový moment.

Experimentálně bylo určeno, že působením zmíněné gravitační síly na oba cyklisty jsou pedály každého jezdce zatěžovány svislou silou odpovídající hmotnosti 21,6 kg. Obě sedla poté musí odolávat svislé síle, jež odpovídá hmotnosti 81,6 kg. Na řídítka pak dvojici jezdců zůstává 16,8 kg taktéž ve svislém směru. Posádka však na svá řídítka působí v šikmém směru pod úhlem 45° .

Z tohoto důvodu se celková síla působící na řídítka rovná:

$$F_{ri1} = F_{ri2} = \frac{16,8 \cdot 9,81}{\sin(45^\circ)} = 233,1 \text{ N} \quad (3)$$

Stejně jako na řídítka, tak i na sedla působí oba jezdci pod určitým úhlem. Tento úhel se zjistí ze statické rovnováhy složek sil ve vodorovném směru:

$$F_{ri1} \cdot \cos(45^\circ) + F_{ri2} \cdot \cos(45^\circ) = F_{seY1} \cdot \cotg(\rho) + F_{seY2} \cdot \cotg(\rho) \quad (4)$$

$$\rho = 78,4^\circ$$

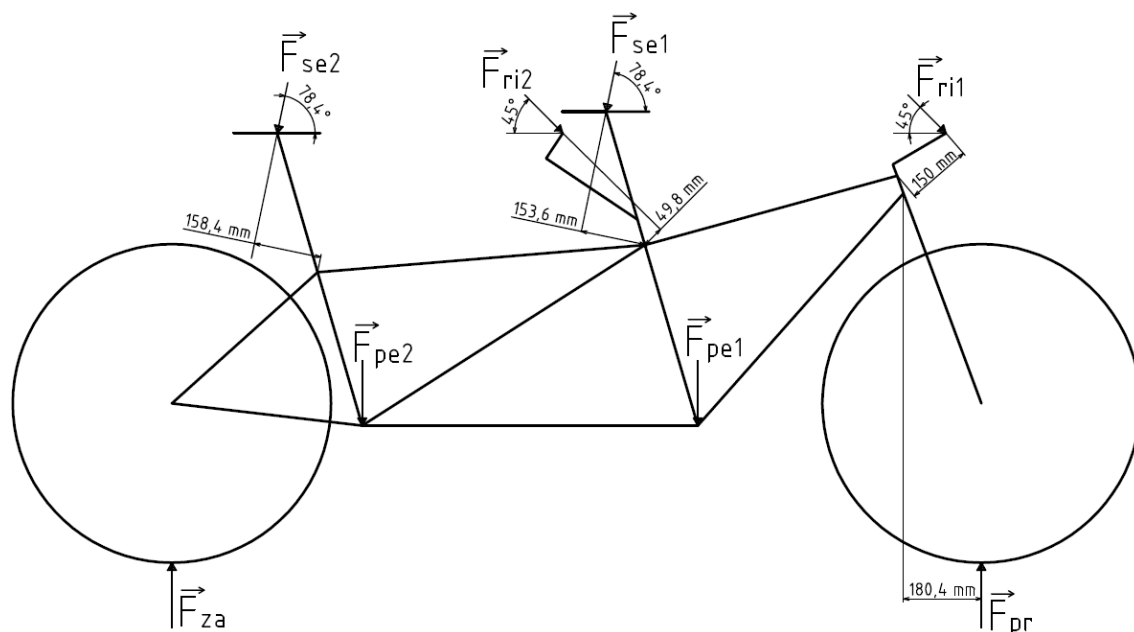
Tedy celková síla působící na sedlo má velikost:

$$F_{se1} = F_{se2} = \frac{F_{seY2}}{\sin(\rho)} = 817,3 \text{ N} \quad (5)$$

Už zbývá vyčíslit jen obě svislé síly směřující na pedály neboli do středového složení šlapátek.

$$F_{pe1} = F_{pe2} = 21,6 \cdot 9,81 = 211,9 \text{ N} \quad (6)$$

Celkové zatížení tandemového kola při prvním zátěžném stavu zahrnuje tedy obě svislé síly na pedály $F_{pe1} = F_{pe2} = 211,9 \text{ N}$, také dvě síly od obou jezdců působící pod úhlem 45° na řídítka $F_{ri1} = F_{ri2} = 233,1 \text{ N}$ a nakonec dvě síly zatěžující pod úhlem $78,4^\circ$ obě sedla $F_{se1} = F_{se2} = 817,3 \text{ N}$.



Obr. 18: Síly od zatížení posádkou a uvolněné reakční síly působící na dvojčelo

Lze si všimnout, že bylo využito Saint-Venantova principu, kdy jsme neznámé silové působení nahradili modelem jedné osamělé síly do určitého bodu či místa na dvojčele.

7.1. Statický rozbor rámu dvojkola

Pro určení napjatosti v samotném rámu dvojkola je nejprve zapotřebí zjistit, jaké zatížení působí přímo na něj. Proto byl postupně ekvivalentně nahrazen vliv jak předního a zadního sedla, tak obou sedlových trubek. Dále pak vliv obou řídítek s představci a pevné přední vidlice. Jelikož samotná konstrukce rámu váží přibližně 4 kg, lze její hmotnost zanedbat.

U jednotlivých částí tandemového kola byly síly posunuty mimo své nositelky do bodů na rámu dvojkola. Z toho důvodu zde vznikají přidané momenty, jejichž hodnoty jsou násobkem velikostí původních sil a jejich kolmých vzdáleností od určitého bodu na tandemovém rámu.

Velikosti přidaných momentů jsou následující:

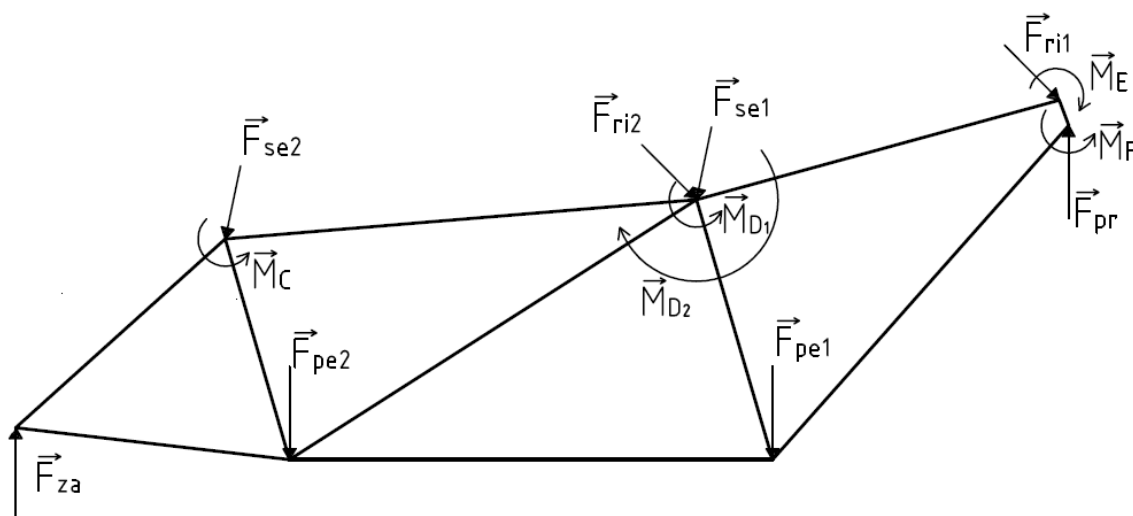
$$\text{pro přední řídítka: } M_E = F_{ri1} \cdot 0,15 = 34,961 \text{ Nm}$$

$$\text{pro zadní řídítka: } M_{D2} = F_{ri2} \cdot 0,0498 = 11,607 \text{ Nm}$$

$$\text{pro přední sedlo: } M_{D1} = F_{se1} \cdot 0,1536 = 125,535 \text{ Nm}$$

$$\text{pro zadní sedlo: } M_C = F_{se2} \cdot 0,1584 = 129,458 \text{ Nm}$$

$$\text{pro přední vidlici: } M_F = F_{pr} \cdot 0,1804 \quad (7)$$



Obr. 19: Staticky ekvivalentní náhrada

Vnější statický rozbor

$$\text{Počet použitelných podmínek: } v = 3$$

$$\text{Počet neznámých parametrů: } \mu = 3$$

$$\text{Míra statické neurčitosti: } s = \mu - v = 0 \quad (8)$$

Podle literatury [7] platí, že je-li splněna podmínka $v = \mu$ a zároveň $v \leq \mu$, úlohu tak můžeme považovat za staticky určitou a lze ji řešit metodami statiky.

Rovnice statické rovnováhy vycházející z obr. 19:

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{se2} \cdot \cos(\rho) + F_{ri2} \cdot \cos(45^\circ) - F_{se1} \cdot \cos(\rho) + F_{ri1} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \quad (9)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{za} + F_{pr} - F_{pe1} - F_{pe2} - F_{se2} \cdot \sin(\rho) - F_{ri2} \cdot \sin(45^\circ) - F_{se1} \cdot \sin(\rho) - F_{ri1} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \quad (10)$$

Moment je počítán k bodu F na rámu dvojkola.

$$\sum M_F = 0$$

$$-F_{za} \cdot 1,69342 + F_{pe2} \cdot 1,25302 + F_{pe1} \cdot 0,47632 - F_{ri1} \cdot 0,0178 + F_{se1} \cdot 0,55973 + F_{ri2} \cdot 0,50872 + F_{se2} \cdot 1,2871 + M_C + M_{D1} - M_{D2} - M_E + M_F = 0 \quad (11)$$

Výsledkem řešení těchto rovnic jsou velikosti reakčních sil na přední a zadní část tandemového rámu, tedy $F_{za} = 1400 \text{ N}$ a $F_{pr} = 954,4 \text{ N}$, a také moment $M_F = 172,17 \text{ Nm}$.

Vnitřní statický rozbor

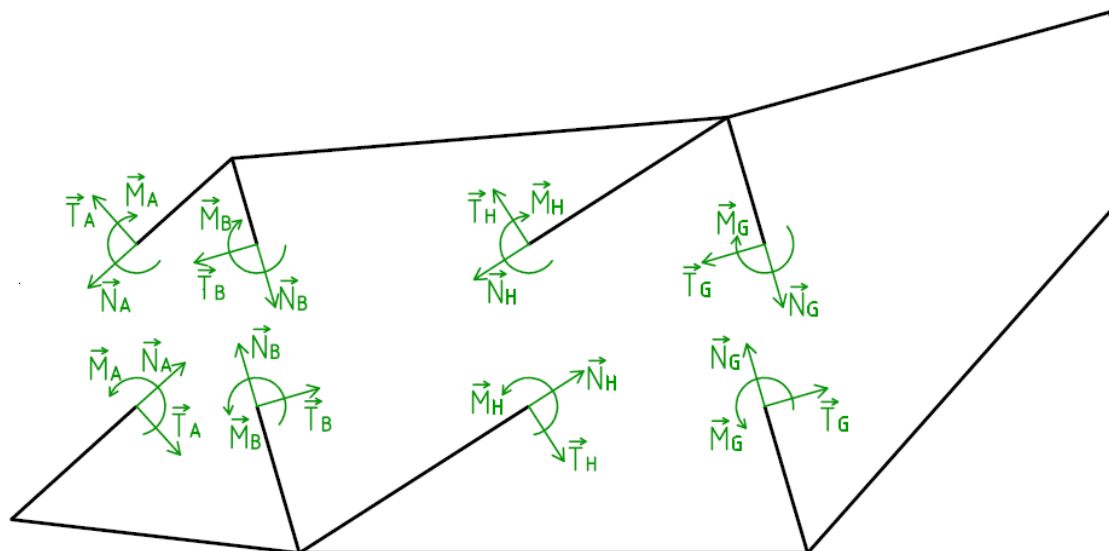
Počet použitelných podmínek:	$v = 3$	
Počet neznámých parametrů:	$\mu = 15$	
Míra statické neurčitosti:	$s = \mu - v = 12$	(12)

Úlohu lze tedy označit za vnitřně dvanáctkrát staticky neurčitou.

7.2. Částečné uvolnění

Aby se stal uzavřený rám dvojkola řešitelnou úlohou, je třeba jej na určitých místech rozřezat, tedy vést rovinu řezu tak, aby vznikla otevřená prutová soustava, která je již řešitelná. Tandemový rám proto uvolníme čtyřmi řezy myšlenou řeznou rovinou. Na protilehlých úsecích v místech řezu zavedeme složky VVÚ, které respektují princip akce a reakce. V těchto místech řezu nastává povinnost stanovit podmínky spojitosti deformace. Tyto neznámé složky VVÚ představují neznámé vazebné síly v prutech. Z důvodu jejich výskytu se právě daná úloha stává vnitřně dvanáctkrát staticky neurčitou, neboť získáváme dvanáct neznámých parametrů, které bude třeba vypočítat pro celkové vyčíslení a vykreslení průběhů výsledných vnitřních účinků v každém prutu.

Na obr. 20 je znázorněné částečné uvolnění rámu dvojkola v místech označených písmeny A, B, G a H. Pro přehlednost do něj nebyly zakresleny síly od vnějšího zatížení. Tohle částečné uvolnění a následné zavedené podmínky spojitosti deformace platí pro oba zátěžné stavy.



Obr. 20: Částečné uvolnění

7.3. Určení podmínek spojitosti deformace

Z částečného uvolnění plyne, že je zapotřebí pro čtyři místa stanovit dvanáct podmínek spojitosti deformace, které udávají posuv a natočení v daných místech řezu. Vnitřní statická neurčitost se rovná dvanácti a to znamená, že musíme sestavit dvanáct rovnic o dvanácti neznámých. V našem případě se jedná o tyto neznámé parametry:

$$\mu = \{T_A, N_A, M_A, N_B, T_B, M_B, N_G, T_G, M_G, N_H, T_H, M_H\}$$

Pro výpočet neznámých vazebných sil v prutech lze použít integrální přístup pomocí Castiglianovy věty.

Podmínky spojitosti deformace jsou tedy:

$$|uN_A| = |uN_A'|; |uN_B| = |uN_B'|; |uN_G| = |uN_G'|; |uN_H| = |uN_H'| \quad (13)$$

$$|wT_A| = |wT_A'|; |wT_B| = |wT_B'|; |wT_G| = |wT_G'|; |wT_H| = |wT_H'| \quad (14)$$

$$|\phi M_A| = |\phi M_A'|; |\phi M_B| = |\phi M_B'|; |\phi M_G| = |\phi M_G'|; |\phi M_H| = |\phi M_H'| \quad (15)$$

Kde:

u - je posuv od normálové složky v daném bodě

w - je posuv od tečné složky v daném bodě

ϕ - je natočení od příslušného ohybového momentu v daném bodě

Jelikož z podmínek spojitosti deformace je patrné, že se nám síly, respektive momenty, na obou stranách rovnic rovnají, lze potom jednoduchou úpravou těchto vztahů zjistit, že parciální derivace energie napjatosti podle výše uvedených neznámých parametrů se rovnají nule.

$$\frac{\partial W}{\partial N_A} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial N_B} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial N_G} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial N_H} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T_A} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial T_B} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial T_G} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial T_H} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M_G} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M_H} = 0 \quad (18)$$

Kde: W – je energie napjatosti

Do energie napjatosti byla zahrnuta pouze energie od ohybového namáhání a od namáhání na tah a tlak, neboť energie od posouvajících sil je s ohledem na štíhlost prutů zanedbatelná.

V našem případě se jedná o rovinnou úlohu, kde platí následující vztahy:

Energie napjatosti pro prostý tah-tlak:

$$W_N = \int_0^l \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} dx \quad (19)$$

Energie napjatosti pro prostý ohyb:

$$W_M = \int_0^l \frac{M_{oz}^2}{2 \cdot E \cdot J_Z} dx \quad (20)$$

Před samotným sestavením rovnic a výpočtem neznámých vnitřních vazebných sil v prutech za použití podmínek spojitosti deformace a Castiglianovy věty, je nezbytné nejprve stanovit složky VVÚ, které budou řešeny ve čtrnácti úsecích rámu dvojkola. Všechny tyto složky výsledných vnitřních účinků budou funkcemi právě dvanácti neznámých parametrů, jejichž velikosti hledáme.

7.4. Výsledné vnitřní silové účinky

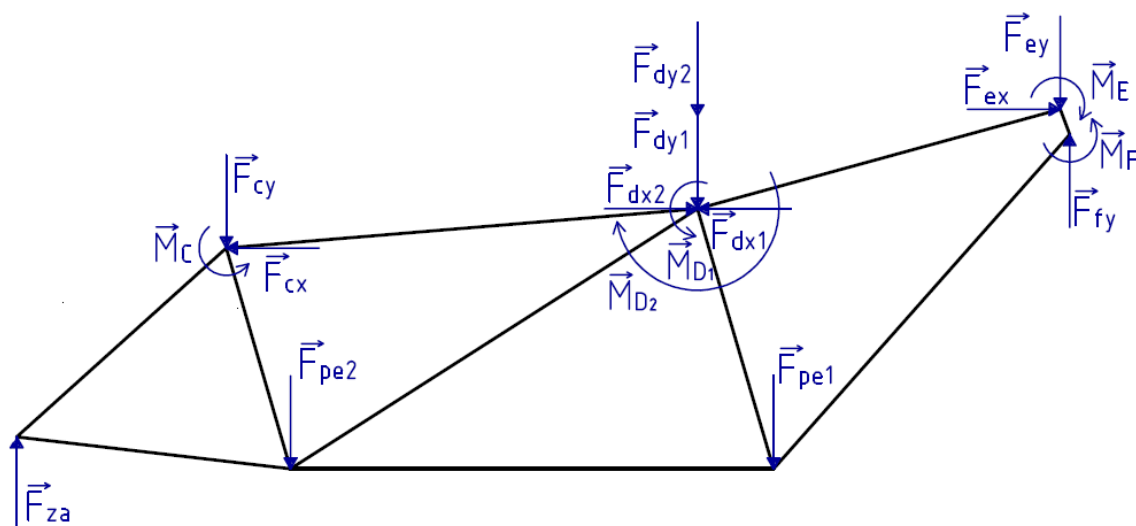
Při určování výsledných vnitřních účinků u uzavřené prutové soustavy se jedná vždy o úlohu vnitřně staticky neurčitou. Z tohoto důvodu bylo zapotřebí daný tandemový rám rozřezat a vytvořit tak otevřenou prutovou soustavu.

K následnému stanovení složek VVÚ se použila následující znaménková konvence. Normálová síla N v daném řezu je kladná, směřuje-li ven z prutu a tedy způsobuje-li tah. Posouvající sílu T lze považovat za kladnou, pokud otáčí elementem v řezu a to podle směru hodinových ručiček. A nakonec ohybový moment M_{oz} můžeme uvažovat v řezu jako kladný, jestliže deformuje střednici prutu do konvexního tvaru.

V řezech číslo 1 až 7 se uvolňovalo „zleva“, ale v dalších řezech číslo 8 až 14 jsem naopak uvolňoval „zprava“. Hodnoty vstupující do výpočtu pro první zátěžný stav jsou uvedeny v následující tabulce.

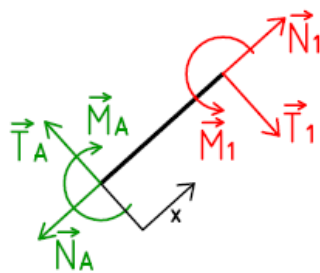
Tabulka 1: Hodnoty sil a momentů vstupující do výpočtu

Označení síly (momentu)	Velikost
F_{za}	1400,000 N
F_{cx}	164,808 N
F_{cy}	800,496 N
M_C	129,458 Nm
F_{pe2}	211,900 N
F_{dx2}	164,808 N
F_{dx1}	164,808 N
F_{dy1}	800,496 N
F_{dy2}	164,808 N
M_{D1}	125,535 Nm
M_{D2}	11,607 Nm
F_{pe1}	211,900 N
F_{ey}	164,808 N
F_{ex}	164,808 N
M_E	34,961 Nm
M_F	172,168 Nm
F_{fy}	954,369 N



Obr. 21: Orientace sil a momentů

Zobrazení řezů a stanovení VVÚ

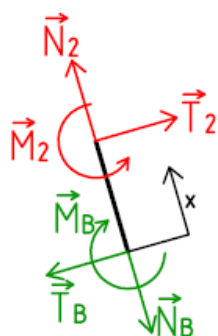


Obr. 22: Řez 1

$$N_1 = N_A \quad (21)$$

$$T_1 = T_A \quad (22)$$

$$M_1 = T_A \cdot x + M_A \quad (23)$$

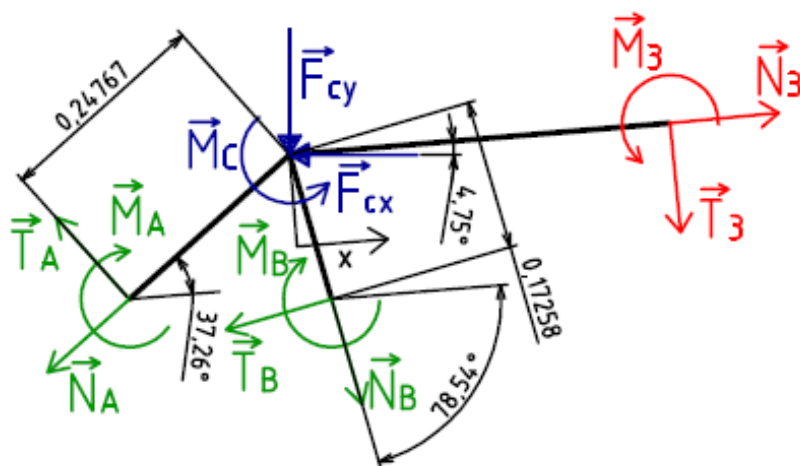


Obr. 23: Řez 2

$$N_2 = N_B \quad (24)$$

$$T_2 = T_B \quad (25)$$

$$M_2 = T_B \cdot x + M_B \quad (26)$$

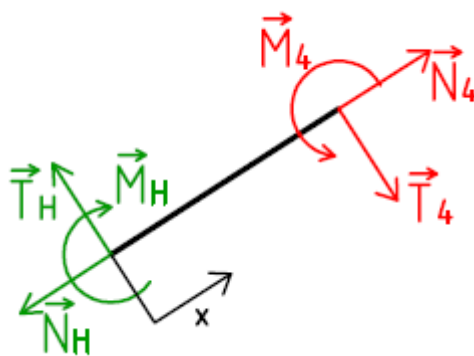


Obr. 24: Řez 3

$$N_3 = N_A \cdot \cos(37,26^\circ) + T_A \cdot \cos(52,74^\circ) + T_B \cdot \cos(11,46^\circ) - N_B \cdot \cos(78,54^\circ) + F_{cx} \cdot \cos(4,75^\circ) + F_{cy} \cdot \cos(85,25^\circ) \quad (27)$$

$$T_3 = -N_A \cdot \sin(37,26^\circ) + T_A \cdot \sin(52,74^\circ) - T_B \cdot \sin(11,46^\circ) - N_B \cdot \sin(78,54^\circ) + F_{cx} \cdot \sin(4,75^\circ) - F_{cy} \cdot \sin(85,25^\circ) \quad (28)$$

$$M_3 = -N_A \cdot \sin(37,26^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,24767 + T_A \cdot \sin(52,74^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(78,54^\circ) \cdot x + T_B \cdot 0,11258 - T_B \cdot \sin(11,46^\circ) \cdot x + F_{cx} \cdot \sin(4,75^\circ) \cdot x - F_{cy} \cdot \sin(85,25^\circ) \cdot x + M_A + M_B - M_C \quad (29)$$

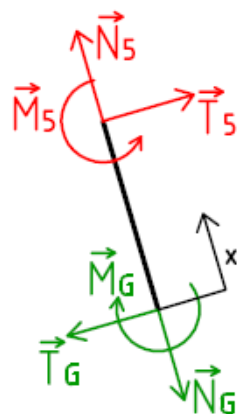


Obr. 25: Řez 4

$$N_4 = N_H \quad (30)$$

$$T_4 = T_H \quad (31)$$

$$M_4 = T_H \cdot x + M_H \quad (32)$$

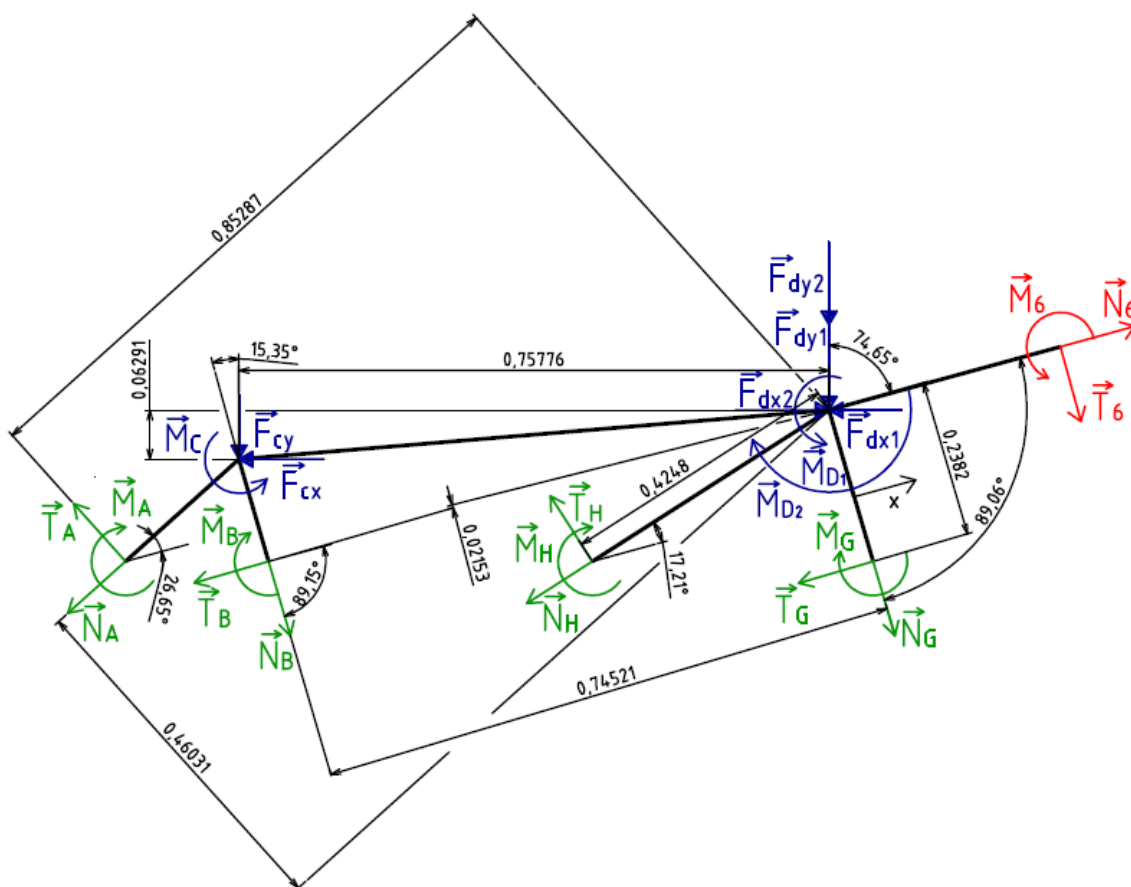


Obr. 26: Řez 5

$$N_5 = N_G \quad (33)$$

$$T_5 = T_G \quad (34)$$

$$M_5 = T_G \cdot x + M_G \quad (35)$$

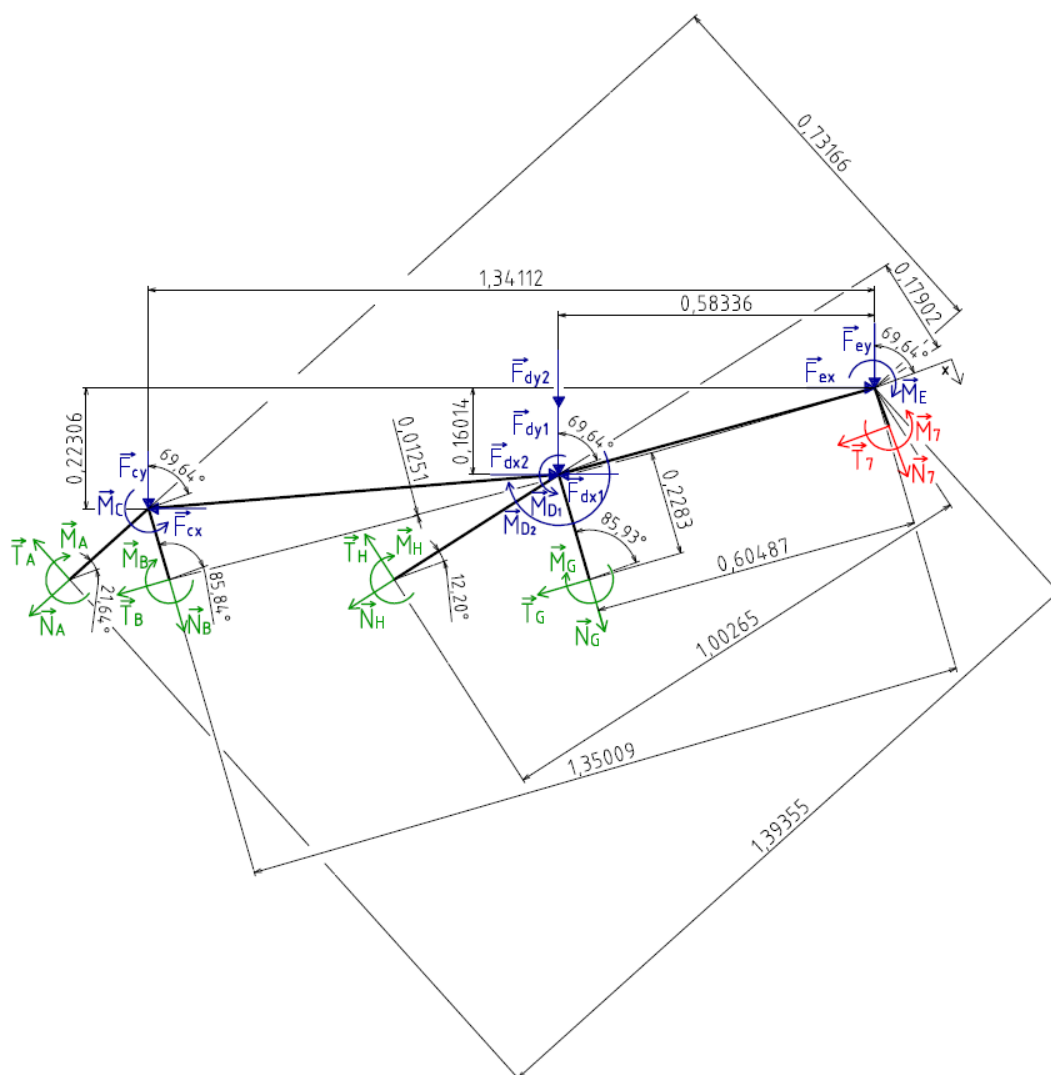


Obr. 27: Řez 6

$$\begin{aligned}
 N_6 = & N_A \cdot \cos(26,65^\circ) + T_A \cdot \cos(63,35^\circ) + T_B \cdot \cos(0,85^\circ) - \\
 & -N_B \cdot \cos(89,15^\circ) + F_{cx} \cdot \cos(15,35^\circ) + F_{cy} \cdot \cos(74,65^\circ) + N_H \cdot \cos(17,21^\circ) + \\
 & +T_H \cdot \cos(72,79^\circ) + T_G \cdot \cos(0,94^\circ) - N_G \cdot \cos(89,06^\circ) + F_{dx1} \cdot \cos(15,35^\circ) - \\
 & -F_{dx2} \cdot \cos(15,35^\circ) + F_{dy1} \cdot \cos(74,65^\circ) + F_{dy2} \cdot \cos(74,65^\circ)
 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 T_6 = & -N_A \cdot \sin(26,65^\circ) + T_A \cdot \sin(63,35^\circ) - T_B \cdot \sin(0,85^\circ) - \\
 & -N_B \cdot \sin(89,15^\circ) + F_{cx} \cdot \sin(15,35^\circ) - F_{cy} \cdot \sin(74,65^\circ) - N_H \cdot \sin(17,21^\circ) + \\
 & +T_H \cdot \sin(72,79^\circ) - T_G \cdot \sin(0,94^\circ) - N_G \cdot \sin(89,06^\circ) + F_{dx1} \cdot \sin(15,35^\circ) - \\
 & -F_{dx2} \cdot \sin(15,35^\circ) - F_{dy1} \cdot \sin(74,65^\circ) - F_{dy2} \cdot \sin(74,65^\circ)
 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 M_6 = & -N_A \cdot 0,46031 - N_A \cdot \sin(26,65^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,85287 - N_B \cdot 0,74521 + \\
 & +T_A \cdot \sin(63,35^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(89,15^\circ) \cdot x + T_B \cdot 0,02153 + F_{cx} \cdot 0,06291 - \\
 & -T_B \cdot \sin(0,85^\circ) \cdot x + F_{cx} \cdot \sin(15,35^\circ) \cdot x - F_{cy} \cdot 0,75776 + T_H \cdot 0,4248 - \\
 & -F_{cy} \cdot \sin(74,65^\circ) \cdot x - N_H \cdot \sin(17,21^\circ) \cdot x + T_H \cdot \sin(72,79^\circ) \cdot x - \\
 & -N_G \cdot \sin(89,06^\circ) \cdot x + T_G \cdot 0,2382 - T_G \cdot \sin(0,94^\circ) \cdot x + \\
 & +F_{dx1} \cdot \sin(15,35^\circ) \cdot x - F_{dx2} \cdot \sin(15,35^\circ) \cdot x - F_{dy1} \cdot \sin(74,65^\circ) \cdot x - \\
 & -F_{dy2} \cdot \sin(74,65^\circ) \cdot x + M_A + M_B - M_C + M_H + M_G - M_{D1} + M_{D2}
 \end{aligned} \quad (38)$$

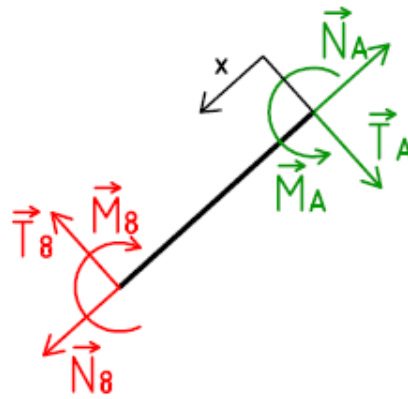


Obr. 28: Řez 7

$$\begin{aligned}
N_7 = & -N_A \cdot \cos(68,36^\circ) + T_A \cdot \cos(21,64^\circ) + T_B \cdot \cos(85,84^\circ) - \\
& -N_B \cdot \cos(4,16^\circ) + F_{cx} \cdot \cos(69,64^\circ) - F_{cy} \cdot \cos(20,36^\circ) - N_H \cdot \cos(77,80^\circ) + \\
& + T_H \cdot \cos(12,20^\circ) + T_G \cdot \cos(85,93^\circ) - N_G \cdot \cos(4,07^\circ) + F_{dx1} \cdot \cos(69,64^\circ) - \\
& - F_{dx2} \cdot \cos(69,64^\circ) - F_{dy1} \cdot \cos(20,36^\circ) - F_{dy2} \cdot \cos(20,36^\circ) - \\
& - F_{ey} \cdot \cos(20,36^\circ) - F_{ex} \cdot \cos(69,64^\circ)
\end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
T_7 = & -N_A \cdot \sin(68,36^\circ) - T_A \cdot \sin(21,64^\circ) - T_B \cdot \sin(85,84^\circ) - \\
& -N_B \cdot \sin(4,16^\circ) - F_{cx} \cdot \sin(69,64^\circ) - F_{cy} \cdot \sin(20,36^\circ) - N_H \cdot \sin(77,80^\circ) - \\
& -T_H \cdot \sin(12,20^\circ) - T_G \cdot \sin(85,93^\circ) - N_G \cdot \sin(4,07^\circ) - F_{dx1} \cdot \sin(69,64^\circ) + \\
& + F_{dx2} \cdot \sin(69,64^\circ) - F_{dy1} \cdot \sin(20,36^\circ) - F_{dy2} \cdot \sin(20,36^\circ) - \\
& - F_{ey} \cdot \sin(20,36^\circ) + F_{ex} \cdot \sin(69,64^\circ)
\end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
M_7 = & -N_A \cdot 0,73166 - N_A \cdot \sin(68,36^\circ) \cdot x + T_A \cdot 1,39355 - N_B \cdot 1,35009 - \\
& -T_A \cdot \sin(21,64^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(4,16^\circ) \cdot x + T_B \cdot 0,01251 + F_{cx} \cdot 0,22306 - \\
& -T_B \cdot \sin(85,84^\circ) \cdot x - F_{cx} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x - F_{cy} \cdot 1,34112 - N_H \cdot 0,17902 - \\
& -F_{cy} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x - N_H \cdot \sin(77,80^\circ) \cdot x - T_H \cdot \sin(12,20^\circ) \cdot x + \\
& + T_H \cdot 1,00265 - N_G \cdot \sin(4,07^\circ) \cdot x - N_G \cdot 0,60487 - T_G \cdot \sin(85,93^\circ) \cdot x + \\
& + T_G \cdot 0,2283 + F_{dx1} \cdot 0,16014 - F_{dx1} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x - F_{dx2} \cdot 0,16014 + \\
& + F_{dx2} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x - F_{dy1} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x - F_{dy2} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x - \\
& - F_{dy1} \cdot 0,58336 - F_{dy2} \cdot 0,58336 + F_{ex} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x + M_A + M_B - M_C - \\
& - F_{ey} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x + M_H + M_G - M_{D1} + M_{D2} + M_E
\end{aligned} \quad (41)$$

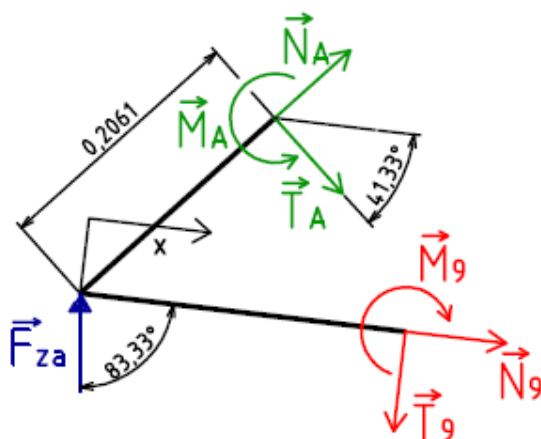


Obr. 29: Řez 8

$$N_8 = N_A \quad (42)$$

$$T_8 = T_A \quad (43)$$

$$M_8 = -T_A \cdot x + M_A \quad (44)$$

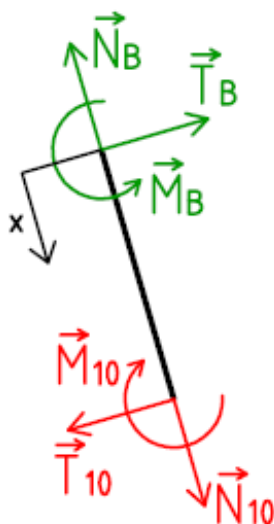


Obr. 30: Řez 9

$$N_9 = -N_A \cdot \cos(48,67^\circ) - T_A \cdot \cos(41,33^\circ) + F_{za} \cdot \cos(83,33^\circ) \quad (45)$$

$$T_9 = N_A \cdot \sin(48,67^\circ) - T_A \cdot \sin(41,33^\circ) + F_{za} \cdot \sin(83,33^\circ) \quad (46)$$

$$M_9 = -N_A \cdot \sin(48,67^\circ) \cdot x - T_A \cdot 0,2061 + T_A \cdot \sin(41,33^\circ) \cdot x - F_{za} \cdot \sin(83,33^\circ) \cdot x + M_A \quad (47)$$

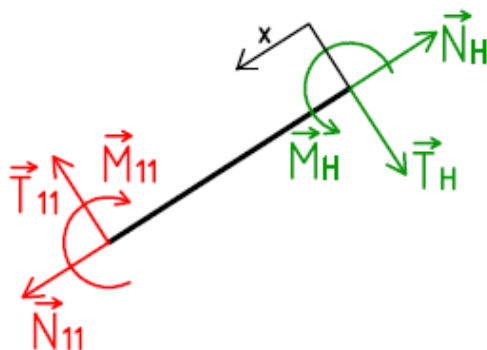


Obr. 31: Řez 10

$$N_{10} = N_B \quad (48)$$

$$T_{10} = T_B \quad (49)$$

$$M_{10} = -T_B \cdot x + M_B \quad (50)$$

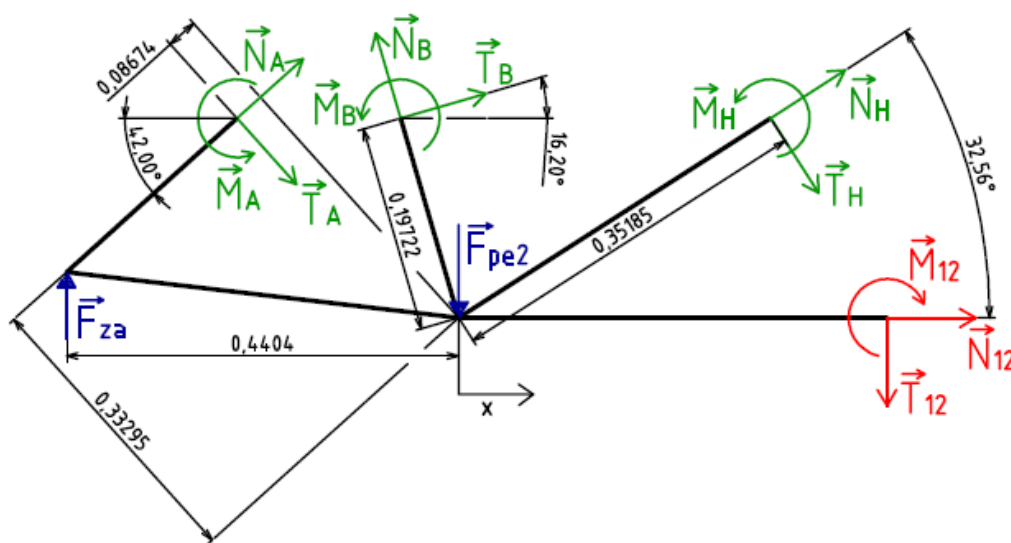


Obr. 32: Řez 11

$$N_{11} = N_H \quad (51)$$

$$T_{11} = T_H \quad (52)$$

$$M_{11} = -T_H \cdot x + M_H \quad (53)$$

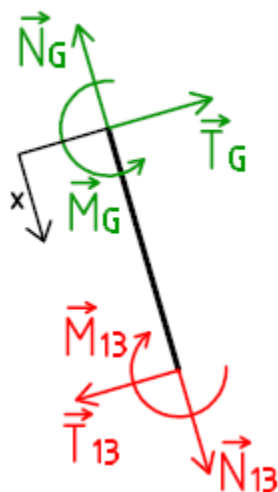


Obr. 33: Řez 12

$$N_{12} = -N_A \cdot \cos(42^\circ) - T_A \cdot \cos(48^\circ) - T_B \cdot \cos(16,20^\circ) + N_B \cdot \cos(73,80^\circ) - N_H \cdot \cos(32,56^\circ) - T_H \cdot \cos(57,44^\circ) \quad (54)$$

$$T_{12} = +F_{za} + N_A \cdot \sin(42^\circ) - T_A \cdot \sin(48^\circ) + T_B \cdot \sin(16,20^\circ) + N_B \cdot \sin(73,80^\circ) - F_{pe2} - T_H \cdot \sin(57,44^\circ) + N_H \cdot \sin(32,56^\circ) \quad (55)$$

$$M_{12} = -N_A \cdot 0,33295 - N_A \cdot \sin(42^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,08674 + T_A \cdot \sin(48^\circ) \cdot x - F_{za} \cdot 0,4404 - T_B \cdot 0,19722 - T_B \cdot \sin(16,20^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(73,80^\circ) \cdot x + F_{pe2} \cdot x - T_H \cdot 0,35185 + T_H \cdot \sin(57,44^\circ) \cdot x - N_H \cdot \sin(32,56^\circ) \cdot x + M_A + M_B + M_H - F_{za} \cdot x \quad (56)$$

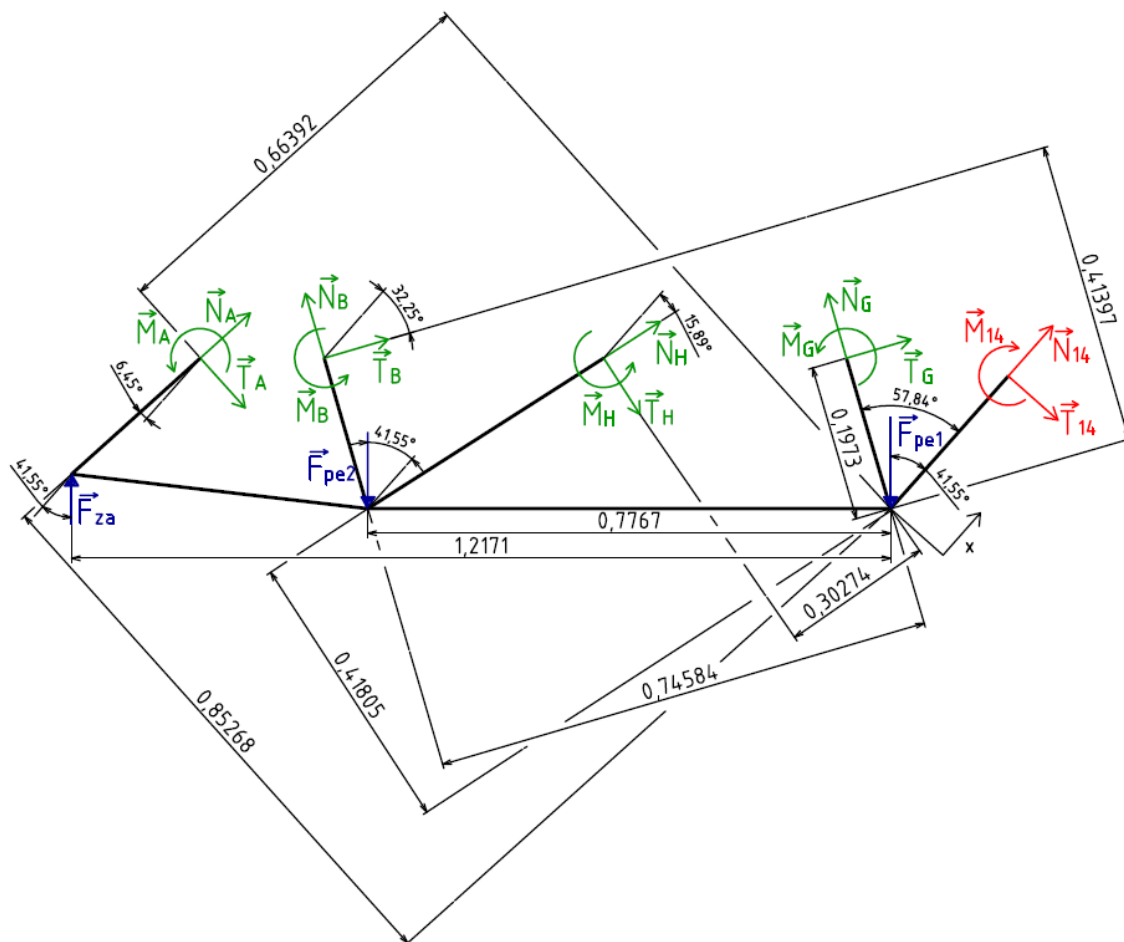


Obr. 34: Řez 13

$$N_{13} = N_G \quad (57)$$

$$T_{13} = T_G \quad (58)$$

$$M_{13} = -T_G \cdot x + M_G \quad (59)$$



Obr. 35: Řez 14

$$\begin{aligned}
N_{14} = & -F_{za} \cdot \cos(41,55^\circ) - N_A \cdot \cos(6,45^\circ) + T_A \cdot \cos(83,55^\circ) - \\
& -N_B \cdot \cos(57,75^\circ) - T_B \cdot \cos(32,25^\circ) + F_{pe2} \cdot \cos(41,55^\circ) - \\
& -N_H \cdot \cos(15,89^\circ) + T_H \cdot \cos(74,11^\circ) - N_G \cdot \cos(57,84^\circ) - \\
& -T_G \cdot \cos(32,16^\circ) + F_{pe1} \cdot \cos(41,55^\circ)
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
T_{14} = & +F_{za} \cdot \sin(41,55^\circ) - N_A \cdot \sin(6,45^\circ) - T_A \cdot \sin(83,55^\circ) + \\
& +N_B \cdot \sin(57,75^\circ) - T_B \cdot \sin(32,25^\circ) - F_{pe2} \cdot \sin(41,55^\circ) - \\
& -N_H \cdot \sin(15,89^\circ) - T_H \cdot \sin(74,11^\circ) + N_G \cdot \sin(57,84^\circ) - \\
& -T_G \cdot \sin(32,16^\circ) - F_{pe1} \cdot \sin(41,55^\circ)
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
M_{14} = & -F_{za} \cdot 1,2171 - F_{za} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x + N_A \cdot \sin(6,45^\circ) \cdot x - \\
& -N_A \cdot 0,85268 + T_A \cdot 0,66392 + T_A \cdot \sin(83,55^\circ) \cdot x - N_B \cdot 0,74584 - \\
& -N_B \cdot \sin(57,75^\circ) \cdot x - T_B \cdot 0,41397 + T_B \cdot \sin(32,25^\circ) \cdot x - N_H \cdot 0,41805 + \\
& +N_H \cdot \sin(15,89^\circ) \cdot x + T_H \cdot 0,30274 + T_H \cdot \sin(74,11^\circ) \cdot x + F_{pe2} \cdot 0,7767 + \\
& +F_{pe2} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x - N_G \cdot \sin(57,84^\circ) \cdot x - T_G \cdot 0,1973 + M_A + M_B + \\
& +T_G \cdot \sin(32,16^\circ) \cdot x + F_{pe1} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x + M_H + M_G
\end{aligned} \tag{62}$$

7.5. Stanovení průřezových charakteristik

Abychom mohli zahájit výpočet neznámých vnitřních vazebných sil v prutech a následně pak určit výsledné vnitřní účinky, je zapotřebí ještě doplnit průřezové charakteristiky. Rám dvojkola, jak už bylo uvedeno, se skládá z trubek různých průměrů o mezikruhovém průřezu a pruty zadní části výpočtového modelu jsou počítány pro ekvivalentní dvojici trubek s dvojnásobnou tuhostí.

Při sestavení průřezových charakteristik se vycházelo z následujících vztahů:

Obsah příčného průřezu:

$$S_i = \frac{\pi \cdot (D_i^2 - d_i^2)}{4} \quad [m^2] \tag{63}$$

Osový kvadratický moment:

$$J_{zi} = \frac{\pi \cdot (D_i^4 - d_i^4)}{64} \quad [m^4] \tag{64}$$

Pro každý průřez byl také rovnou vypočítán modul v ohybu, který bude později využit pro určení velikosti ohybového napětí.

$$W_{oi} = \frac{2 \cdot J_{zi}}{D_i} \quad [m^3] \quad (65)$$

Tabulka 2: Průřezové charakteristiky prutů

Označení prutů	Vnější průměr	Vnitřní průměr	Obsah příčného průřezu	Osový kvadratický moment	Modul v ohybu
i [-]	D_i [m]	d_i [m]	S_i [m ²]	J_{zi} [m ⁴]	W_{oi} [m ³]
1 = 8	0,022	0,0127	$2,5346 \cdot 10^{-4}$	$1,022203 \cdot 10^{-8}$	$9,292757 \cdot 10^{-7}$
2 = 10	0,035	0,0316	$1,7785 \cdot 10^{-4}$	$2,471564 \cdot 10^{-8}$	$1,412322 \cdot 10^{-6}$
4 = 11	0,041	0,038	$1,8614 \cdot 10^{-4}$	$3,635535 \cdot 10^{-8}$	$1,773431 \cdot 10^{-6}$
5 = 13	0,035	0,0316	$1,7785 \cdot 10^{-4}$	$2,471564 \cdot 10^{-8}$	$1,412322 \cdot 10^{-6}$
3	0,041	0,038	$1,8614 \cdot 10^{-4}$	$3,635535 \cdot 10^{-8}$	$1,773431 \cdot 10^{-6}$
6	0,041	0,038	$1,8614 \cdot 10^{-4}$	$3,635535 \cdot 10^{-8}$	$1,773431 \cdot 10^{-6}$
7	0,047	0,036	$7,1707 \cdot 10^{-4}$	$1,570828 \cdot 10^{-7}$	$6,684375 \cdot 10^{-6}$
9	0,022	0,0127	$2,5346 \cdot 10^{-4}$	$1,022203 \cdot 10^{-8}$	$9,292757 \cdot 10^{-7}$
12	0,05	0,0471	$2,2116 \cdot 10^{-4}$	$6,52203 \cdot 10^{-8}$	$2,608812 \cdot 10^{-6}$
14	0,05	0,0471	$2,2116 \cdot 10^{-4}$	$6,52203 \cdot 10^{-8}$	$2,608812 \cdot 10^{-6}$

7.6. Výpočet VVÚ

Dosazením energie napjatosti do podmínek spojitosti deformace upravených za využití Castiglianovy věty, získáváme následujících dvanáct rovnic, ze kterých nám vystupuje dvanáct neznámých hodnot vnitřních vazebných sil v prutech. Nejdříve tedy vypočteme tyto námi hledané neznámé (N_A , T_A , M_A , N_B , T_B , M_B , N_H , T_H , M_H , N_G , T_G , M_G) a posléze jejímž zavedením do již sestavených rovnic VVÚ zjistíme velikosti a vykreslíme skutečné průběhy výsledných vnitřních silových účinků v jednotlivých prutech výpočtového modelu rámové konstrukce dvojkola.

$$\begin{aligned}
uA = \frac{\partial W}{\partial N_A} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial N_A} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial N_A} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial N_A} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_A} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial N_A} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial N_A} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial N_A} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial N_A} dx + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial N_A} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
uB = \frac{\partial W}{\partial N_B} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial N_B} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial N_B} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial N_B} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_B} dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial N_B} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial N_B} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial N_B} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial N_B} dx + \\
& + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial N_B} dx \Big) = 0
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
uG = \frac{\partial W}{\partial N_G} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial N_G} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial N_G} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial N_G} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_G} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial N_G} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial N_G} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial N_G} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial N_G} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial N_G} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
u_H = \frac{\partial W}{\partial N_H} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial N_H} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial N_H} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial N_H} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_H} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial N_H} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial N_H} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial N_H} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial N_H} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial N_H} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}
w_A = \frac{\partial W}{\partial T_A} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial T_A} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial T_A} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial T_A} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial T_A} dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial T_A} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial T_A} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial T_A} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial T_A} dx + \\
& + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial T_A} dx \Big) = 0 \tag{70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
wB = \frac{\partial W}{\partial T_B} &= \frac{1}{E} \cdot \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial T_B} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial T_B} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial T_B} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial T_B} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial T_B} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial T_B} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial T_B} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial T_B} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial T_B} dx \right) = 0 \tag{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
wG = \frac{\partial W}{\partial T_G} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial T_G} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial T_G} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial T_G} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial T_G} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial T_G} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial T_G} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial T_G} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial T_G} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial T_G} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
wH = \frac{\partial W}{\partial T_H} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial T_H} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial T_H} dx + \\
& + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial T_H} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial T_H} dx + \\
& + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial T_H} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial T_H} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial T_H} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial T_H} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial T_H} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\phi A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial M_A} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial M_A} dx + \\
& + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial M_A} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial M_A} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial M_A} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial M_A} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
\phi B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial M_B} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial M_B} dx + \\
& + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial M_B} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial M_B} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial M_B} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial M_B} dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
\phi G = \frac{\partial W}{\partial M_G} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial M_G} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial M_G} dx + \\
& + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial M_G} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial M_G} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial M_G} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial M_G} dx \right) = 0 \quad (76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi H = \frac{\partial W}{\partial M_H} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial M_H} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial M_H} dx + \\
& + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial M_H} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial M_H} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial M_H} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial M_H} dx \right) = 0 \quad (77)
\end{aligned}$$

Řešením výše uvedených rovnic v matematickém softwaru Maple 13 jsme dostali následující soustavu dvanácti lineárních rovnic o dvanácti neznámých.

$$\begin{aligned}
 &2,914927869 \cdot 10^{-4} \cdot N_A - 3,709142624 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 4,297730525 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
 &-3,143220004 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 2,648593308 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 5,300692357 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
 &+3,562586424 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 5,261084446 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 7,736505419 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
 &-1,862795590 \cdot 10^{-4} \cdot T_H - 3,629101521 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 8,373202099 \cdot 10^{-5} \cdot N_G + \\
 &+0,6037566390 = 0
 \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
 &3,562586425 \cdot 10^{-4} \cdot N_A - 5,543841293 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
 &-5,937841336 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 4,078210176 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
 &+5,253731679 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 4,204294146 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 9,179207731 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
 &-2,993256064 \cdot 10^{-4} \cdot T_H - 4,695040036 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 1,369315996 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
 &+0,7669785058 = 0
 \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
 &7,736505419 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 9,054352915 \cdot 10^{-5} \cdot T_A - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
 &-3,608853879 \cdot 10^{-6} \cdot T_G - 7,035081128 \cdot 10^{-5} \cdot M_G - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
 &+9,179207731 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 2,345047568 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 2,855908039 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
 &-5,038243764 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 2,217018686 \cdot 10^{-5} \cdot N_G + \\
 &+0,1607245628 = 0
 \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
 &8,373202099 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 1,410184417 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
 &-1,932344732 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
 &+1,369315996 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 6,322305154 \cdot 10^{-6} \cdot T_B + 2,217018686 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
 &-9,443168065 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 4,848753321 \cdot 10^{-5} \cdot N_G + \\
 &+0,1956945201 = 0
 \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
 &-3,709906779 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,124101758 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 6,429330447 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
 &+6,405516217 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 4,210095662 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 6,197898547 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
 &-5,543644156 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 3,433945656 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 9,058533939 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
 &+3,077390332 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 4,830912085 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,410146332 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
 &-0,7985157685 = 0
 \end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
 &5,245356199 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 3,433945657 \cdot 10^{-5} \cdot T_A - 5,501428907 \cdot 10^{-5} \cdot M_B + \\
 &+2,990426285 \cdot 10^{-6} \cdot T_G - 3,010284085 \cdot 10^{-5} \cdot M_G - 5,245409304 \cdot 10^{-5} \cdot M_A + \\
 &+4,204743367 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 3,128155619 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 2,333121168 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
 &-1,670475219 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 8,064378076 \cdot 10^{-5} \cdot M_H + 6,302803293 \cdot 10^{-6} \cdot N_G + \\
 &+0,1003028030 = 0
 \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
& -1,862984307 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 3,077390332 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 4,190805715 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 2,678994893 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 2,993106761 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 1,670475219 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 5,040526993 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
& + 2,196192104 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 2,746632515 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 9,442406918 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& - 0,4230976519 = 0
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
& -3,151045526 \cdot 10^{-5} \cdot N_A + 6,405516217 \cdot 10^{-5} \cdot T_A + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_B + \\
& + 1,857722138 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 5,875852486 \cdot 10^{-5} \cdot M_G + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_A - \\
& - 5,939805831 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 2,990426285 \cdot 10^{-6} \cdot T_B - 3,688675257 \cdot 10^{-6} \cdot N_H + \\
& + 4,190805715 \cdot 10^{-5} \cdot T_H + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_H - 1,934297061 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& - 0,0741580471 = 0
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
& -5,300692357 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,197898547 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 8,437703881 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 2,062760404 \cdot 10^{-3} \cdot M_A - \\
& - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 5,245409304 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,638409435 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
& - 1,076224629 = 0
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
& -4,297730525 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,429330447 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 1,051578508 \cdot 10^{-3} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 8,437703881 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 5,777404368 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 5,501428907 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
& - 0,8904997038 = 0
\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
& -3,629101521 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 4,830912083 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 4,695040036 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 8,064378076 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,746632514 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 8,499898615 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
& - 0,7662995703 = 0
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
& -2,648593308 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 4,210095664 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 3,87884101 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,875852486 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 6,326121596 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 4,078210176 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 3,010284085 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 7,035081128 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
& + 2,678994893 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
& - 0,5880039282 = 0
\end{aligned} \tag{89}$$

Také tato nově vzniklá soustava rovnic se i nadále řešila ve zmíněném programu Maple 13 a to pomocí jednoduché funkce *fsolve*. Výsledkem tohoto řešení jsou hledané vnitřní vazebné síly v prutech, které ukazuje následující tabulka.

Tabulka 3: Vnitřní vazebné síly v prutech

Vazebné síly v prutech	Velikosti
N_A	-1826,841 N
T_A	54,5018 N
M_A	6,2927 Nm
N_B	194,4616 N
T_B	164,20998 N
M_B	20,8371 Nm
N_G	-985,2961 N
T_G	27,8943 N
M_G	6,9081 Nm
N_H	-305,8174 N
T_H	30,6618 N
M_H	5,7274 Nm

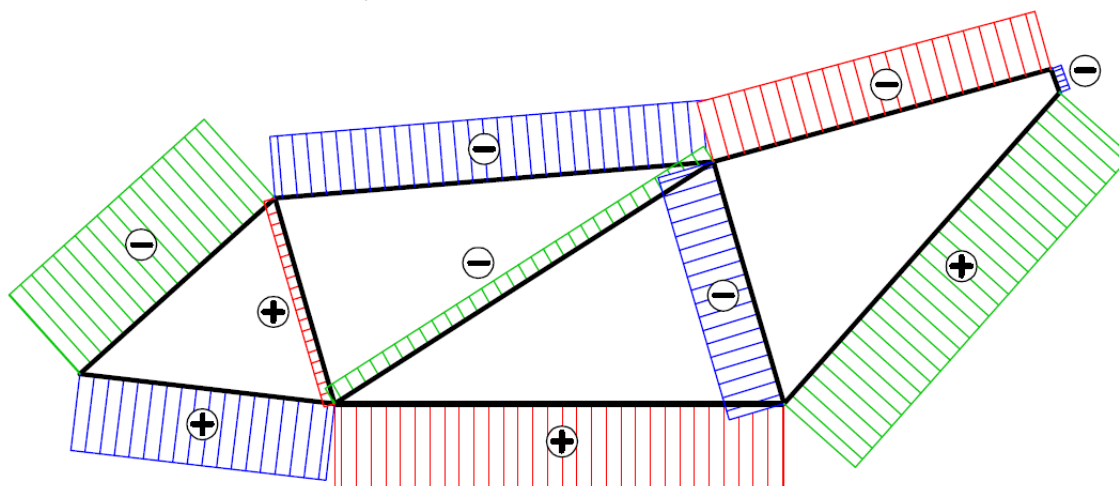
Pokud dosadíme vypočtené hodnoty vnitřních vazebných sil v místech řezu prutů do počátečních rovnic výsledných vnitřních silových účinků (21 - 62), získáme skutečné velikosti a průběhy normálových a posouvajících sil a také ohybových momentů v jednotlivých prutech. Tabulka na další stránce udává skutečné velikosti normálových a posouvajících sil a dále průběhy ohybových momentů pro jednotlivé pruty, ze kterých je výpočtový model rámu tandemového kola složen.

Tabulka 4: Výsledné vnitřní účinky

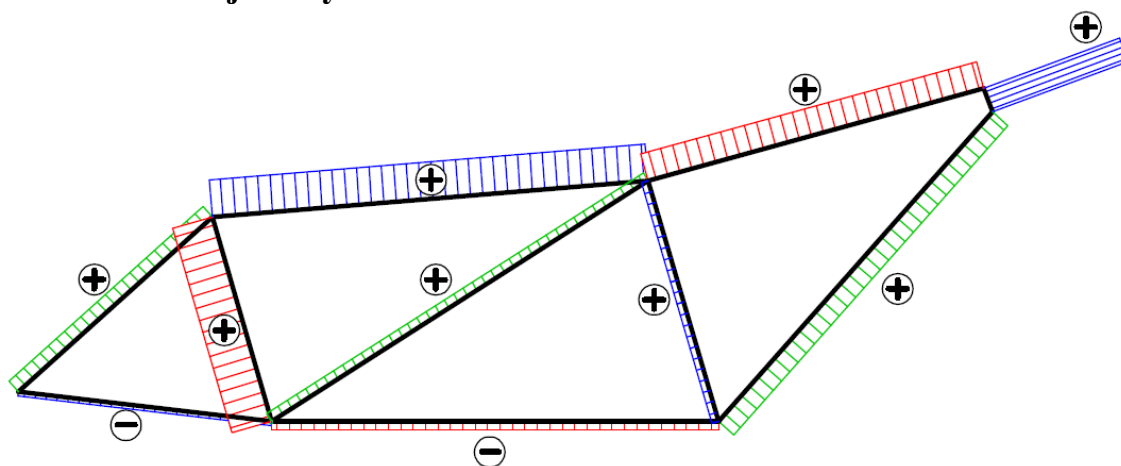
Číslo prutu	Normálová síla	Posouvající síla	Ohybový moment
$i [-]$	$N_i [N]$	$T_i [N]$	$M_i [Nm]$
1	-1826,8414	54,5018	$54,5018 \cdot x + 6,2927$
2	194,4616	164,20998	$164,20998 \cdot x + 20,8371$
3	-1068,1498	142,0979	$142,0979 \cdot x - 60,4903$
4	-305,8174	30,6618	$30,6618 \cdot x + 5,7274$
5	-985,2962	27,8943	$27,8943 \cdot x + 6,9081$
6	-1059,6466	116,5429	$-34,1498 + 116,5429 \cdot x$
7	-188,2921	1162,9478	$71,3477 + 1162,9478 \cdot x$
8	-1826,8414	54,5018	$-54,5018 \cdot x + 6,2927$
9	1328,1214	-17,2774	$-4,9401 + 17,2774 \cdot x$
10	194,4616	164,20998	$-164,20998 \cdot x + 20,8371$
11	-305,8174	30,6618	$-30,6618 \cdot x + 5,7274$
12	1458,9522	-32,6691	$-13,9022 + 32,6691 \cdot x$
13	-985,2962	27,8943	$-27,8943 \cdot x + 6,9081$
14	1651,5555	80,6681	$12,9117 - 80,6681 \cdot x$

7.7. Grafické znázornění průběhů VVÚ

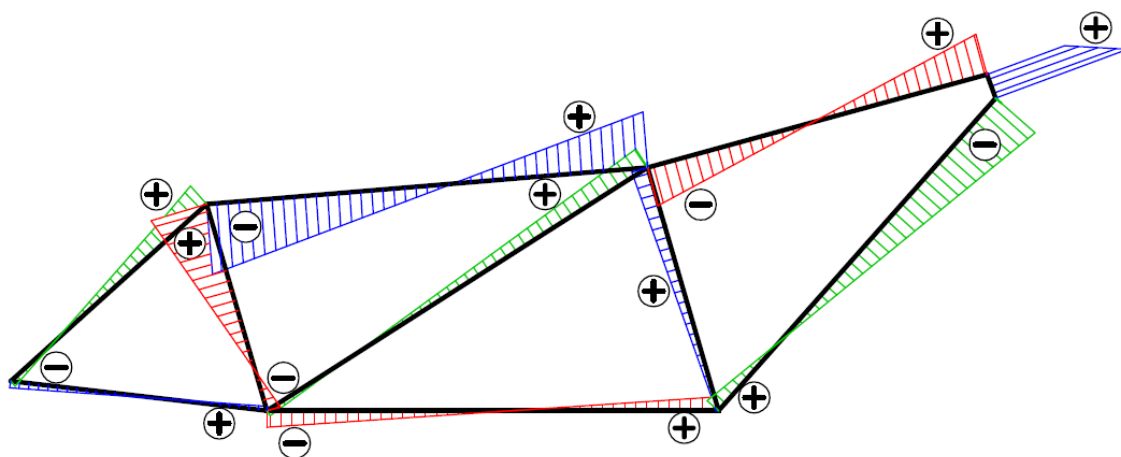
Normálové složky VVÚ



Obr. 36: Průběh normálových sil v prutech

Posouvající síly

Obr. 37: Průběh posouvajících sil v prutech

Ohybové momenty

Obr. 38: Průběh ohybových momentů v prutech

7.8. Výpočet napětí

Celková napětí v jednotlivých prutech určuje součet napětí od namáhání na tah či tlak a napětí způsobené ohybem. Pro stanovení maximální hodnoty napětí je třeba rovněž vzít do úvahy koncentrátoři napětí.

Vztah pro určení napětí způsobené tahem či tlakem:

$$\sigma_{Ni} = \frac{N_i}{S_i} \text{ [MPa]} \quad (90)$$

Kde: σ_{Ni} je napětí od tahu či tlaku
 N_i je normálová složka působící síly
 S_i je obsah příčného průřezu

Vztah pro určení napětí od namáhání na ohyb:

$$\sigma_{oi} = \frac{M_{oi}}{W_{oi}} \text{ [MPa]} \quad (91)$$

Kde: σ_{oi} je napětí od ohybu
 M_{oi} je ohybový moment
 W_{oi} je modul v ohybu

Napětí je počítáno ve všech místech rámové konstrukce dvojkola, avšak maximálních hodnot nabývá v bodech nespojitosti prutů a v působištích vnějších sil a ohybových momentů. Celkové maximální napětí představuje násobek nominálního napětí a součinitele koncentrace napětí. Pro koutové svary, jež spojují trubky v rám tandemového kola, se uvažuje součinitel koncentrace napětí $\alpha = 2$.

Výpočet nominálního napětí:

$$\sigma_{nom} = \sigma_N + \sigma_o \text{ [MPa]} \quad (92)$$

Kde: σ_{nom} je celkové nominální napětí
 σ_N je napětí způsobené tahem či tlakem
 σ_o je napětí od namáhání na ohyb

Určení celkového maximálního napětí:

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \cdot \alpha \text{ [MPa]} \quad (93)$$

Kde: σ_{max} je celkové maximálního napětí
 σ_{nom} je celkové nominální napětí
 α je součinitel koncentrace napětí a v našem případě roven 2

Následující tabulka udává napětí v nebezpečných oblastech tandemového rámu, tedy v místech, kde jsou jednotlivé trubky svařeny. Tyto místa či body představují všechny spojnice prutů našeho výpočtového modelu.

Tabulka 5: Napětí v nebezpečných místech

Místo	Napětí od tahu / tlaku	Napětí od ohybu	Nominální napětí	Celkové napětí
i [-]	σ_N [MPa]	σ_o [MPa]	σ_{nom} [MPa]	σ_{max} [MPa]
C	-5,7384	-34,1092	39,8476	79,6953
D	-5,7384	26,8162	32,5546	65,1092
E	-5,6928	20,4986	26,1913	52,3827
F	7,4677	-17,2575	24,7252	49,4504
I	7,4677	4,9493	12,41696	24,8339
J	6,5968	-5,3289	11,9257	23,8515
K	-7,2077	-5,3155	12,5232	25,0464

7.9. Určení bezpečnosti

Zde bude vypočtena bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti, jež je dána poměrem mezi smluvní mezí kluzu materiálu a maximálním napětím. Abychom zjistili minimální bezpečnost celého rámu dvojkola, je nutné uvažovat místo, kde se nachází maximální absolutní hodnota napětí.

Jak už bylo uvedeno v úvodu této práce, trubky byly vyrobeny z hliníkové slitiny EN AW-7020 T6 s modulem pružnosti v tahu $E = 72$ GPa. Minimální hodnota smluvní meze kluzu slitiny je $R_{p0,2} = 280$ MPa. Minimální hodnota meze pevnosti tohoto materiálu potom činí $R_m = 350$ MPa.

Z tabulky č. 5 lze vyčíst, že největší celkové napětí působí v místě C, tedy v oblasti svaru spojujícího sedlovou trubku druhého jezdce s horní rámovou trubkou. Celková bezpečnost je proto počítána jako poměr minimální hodnoty smluvní meze kluzu zmíněné slitiny ku maximálnímu napětí v místě C.

$$k_{MSP} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{max}} = \frac{280}{79,6953} = 3,51 \quad (94)$$

Z předešlého výpočtu je zřejmé, že mezní stav pružnosti nenastane, a tak nedojde k plastické deformaci, čili k trvalému poškození rámu dvojkola při tomto zátěžném stavu a tandemový rám dané zatížení bez jakýchkoliv problémů vydrží.

7.10. Stanovení posuvu

Nyní provedeme výpočet posuvu ve vybraném místě rámové konstrukce dvojkola. Velikost posuvu zjistíme opět využitím Castiglianovy věty. Avšak posuv lze určit pouze v místě působení síly. Hodnotu posuvu vypočteme tedy parciální derivací energie napjatosti podle určité síly, jež působí v daném směru, ve kterém chceme zjišťovat posuv. V našem případě je posuv počítán v místě největšího zatížení rámu. Při tomto zátěžném stavu se jedná o bod C a posuv stanovíme ve vodorovném směru.

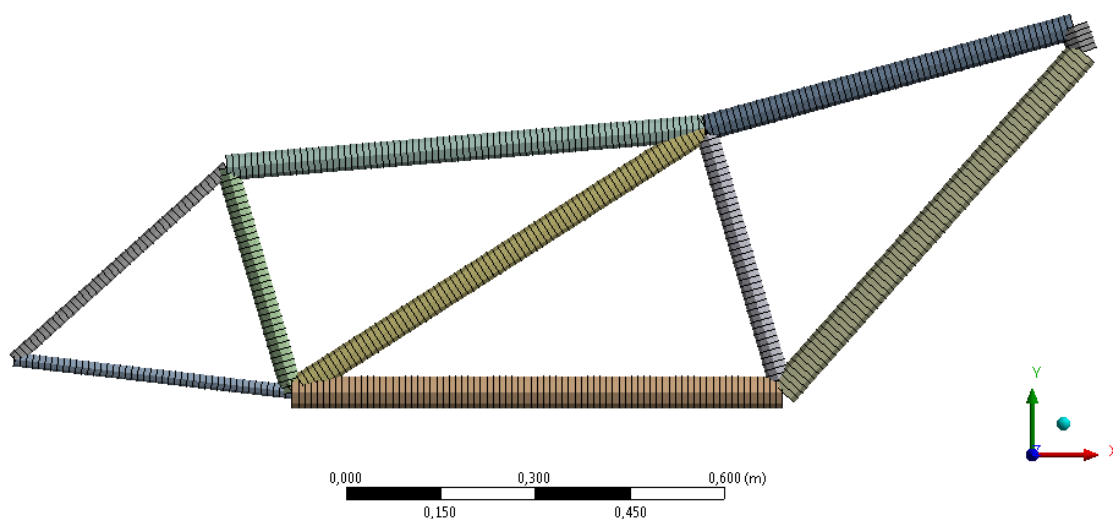
$$\begin{aligned}
 u_{Cx} = \frac{\partial W}{\partial F_{cx}} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial F_{cx}} dx + \right. \\
 & + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial F_{cx}} dx + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial F_{cx}} dx + \\
 & \left. + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial F_{cx}} dx \right) = 0,33 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{95}$$

Posuv v místě C je tedy roven 0,33 mm ve směru působení síly F_{cx} .

7.11. Numerický přístup MKP

Na závěr porovnáme hodnoty z analytického řešení s výsledky získanými numerickým přístupem použitím metody konečných prvků a výpočetního programu ANSYS Workbench 14.5. Jak už bylo zmíněno v úvodní teoretické části bakalářské práce, v uvedeném programu využíváme k analýze prvek BEAM188, neboť rám dvojkola řešíme jako prutovou soustavu. Jelikož jednotlivé trubky, ze kterých je rám svařen, mají svůj vnější průměr podstatně menší než svou délku, není třeba tandemový rám řešit ještě jako těleso, tedy objemovým prvkem SOLID186.

Nejprve v první části zvané Geometry byla do náčrtu narýsována prutová soustava odpovídající výpočtovému modelu. Každé střednici jednotlivých prutů jsem přidělil odpovídající průřez. V druhé části zvané Model v sekci Static Structural byly dané prutové soustavě přiřazeny okrajové podmínky. Dále jsem vygeneroval síť funkcí Body Sizing s elementem odpovídajícímu velikosti 10 mm.

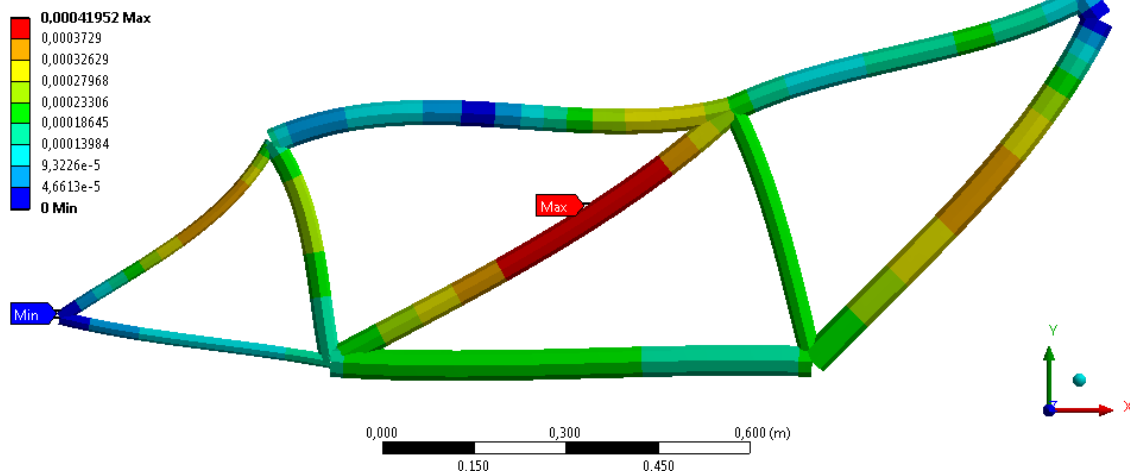


Obr. 39: Vygenerovaná síť

V sekci Solution byla vybrána k numerické analýze celková deformace pod názvem Total Deformation a soubor řešení zvaný Beam Tool. Tento balíček obsahuje Direct Stress pro vykreslení směrového napětí, které odpovídá napětí od namáhání na tah či tlak. Dále pak Beam Tool ještě nabízí k řešení Minimum a Maximum Combined Stress pro zobrazení rozložení nominálního napětí bez uvažování koncentrátorů napětí.

A: 1 Zatezny stav

Total Deformation
 Type: Total Deformation
 Unit: m
 Time: 1
 28.5.2014 21:15



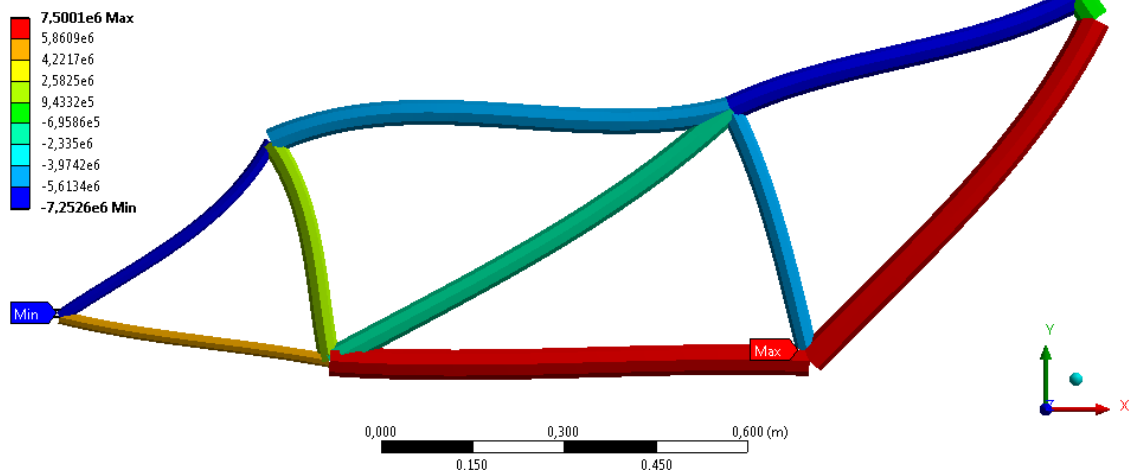
Obr. 40: Deformace prutů u 1. zátěžného stavu

Předcházející obrázek dává možnost srovnání výsledné deformace jednotlivých prutů prutové soustavy výpočtového modelu získané z analytického řešení s numerickým výpočtem pomocí MKP.

Následující obrázek vykresluje směrové napětí tedy tahové respektive tlakové napětí. Lze si tak ověřit správnost analytického výpočtu tím, že průběh směrového napětí porovnáme s výsledky napětí v jednotlivých bodech prutové soustavy z analytického řešení. Taktéž můžeme zkontrolovat znaménka, pokud zmíněný průběh srovnáme s grafickým znázorněním normálové složky VVÚ.

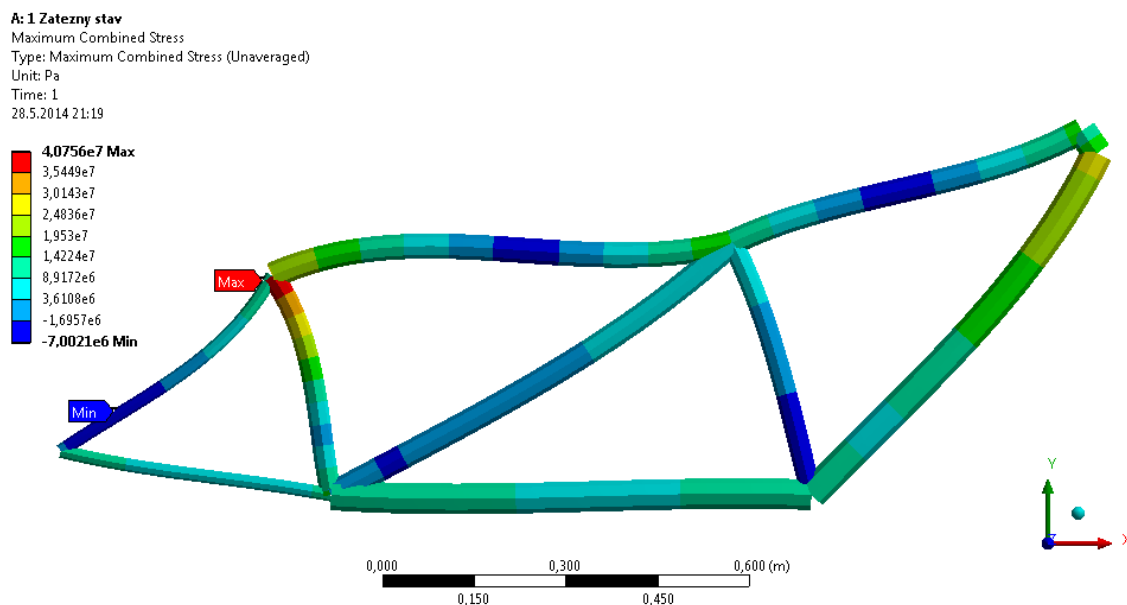
A: 1 Zatezny stav

Direct Stress 2
 Type: Direct Stress (Unaveraged)
 Unit: Pa
 Time: 1
 28.5.2014 21:16



Obr. 41: Směrové napětí u 1. zátěžného stavu

Nakonec porovnáme celkové nominální napětí z analytického výpočtu s výsledným napětím získaným numerickým přístupem MKP. Obrázek č. 42 ukazuje právě rozložení nominálního napětí v jednotlivých prutech prutové soustavy.



Obr. 42: Napětí v jednotlivých prutech během 1. zátěžného stavu

Můžeme si všimnout, že nejvíce namáhané místo stejně jako podle analytického řešení je opravdu bod C, tedy spojení zadní sedlové trubky a horní rámové trubky. Proto pro dané místo provedeme srovnání obou hodnot nominálního napětí. Výpočtem pomocí prosté pružnosti a pevnosti bylo zjištěno celkové nominální napětí o velikosti 39,8476 MPa. Využitím metody konečných prvků jsme získali v tomto bodě hodnotu nominálního napětí rovnu 40,756 MPa. Jelikož vzniklý rozdíl mezi výsledky z analytického výpočtu a numerického přístupu je minimální, můžeme tento rozdíl uvažovat jako nepodstatný a lze jej zanedbat.

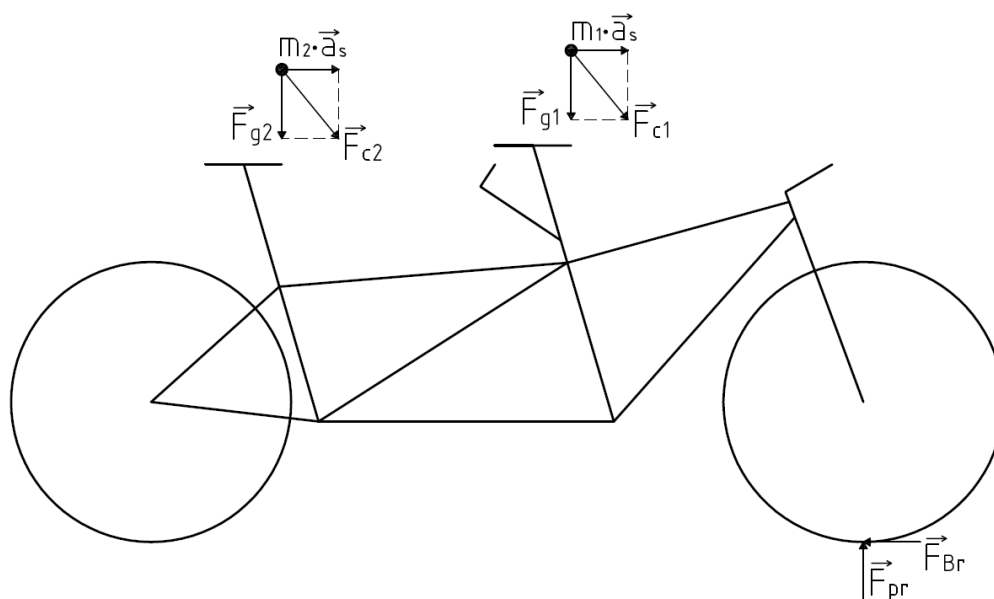
8. DRUHÝ ZÁTĚŽNÝ STAV

U tohoto zátěžného stavu cyklista sedící vpředu maximálně brzdí přední brzdou. V tomto okamžiku je také velmi důležitá správná poloha obou jezdců na dvojkole. Stejně jako při ostrém sjezdu z prudkého kopce, tak i při intenzivním brzdění přední brzdou musí posádka brzdít ve stoje a své těžiště se snažit posunout co nejvíce dozadu, jak to jen jde. Tím snížíme riziko převrácení dvojkola. Opět jsou uvažováni dva jezdcí o hmotnosti 120 kg, tandemové kolo vážící 17 kg, pevná dokonale tuhá přední vidlice a velmi přílnavý povrch vozovky, na které probíhá prudké brzdění. Při tak usilovném brzdění, které většinou nastává jen v opravdu kritických situacích, působí na oba cyklisty a jejich dvojkolo síly mající snahu převrátit tandemové kolo dopředu. Pro zjištění maximálního zatížení je uvažován stav, kdy zadní kolo již pomalu ztrácí kontakt s vozovkou, a tudíž už nepřenáší žádnou sílu.

Na těžiště každého jezdce působí během této zatěžovací zkoušky svisle k zemi gravitační síla a vodorovně proti směru brzdné síly také setrvačná síla. Nutno podotknout, že v následném výpočtu zanedbáváme gravitační a setrvačnou sílu samotného dvojkola, neboť jejich velikosti jsou ve srovnání s hodnotami gravitačních a setrvačných sil od obou jezdců nepodstatné. Zatížení vychází z momentové rovnováhy v místě styku předního kola s vozovkou:

$$F_{g1} \cdot l_1 + F_{g2} \cdot l_2 = a_s \cdot m_1 \cdot h_1 + a_s \cdot m_2 \cdot h_2 \quad (96)$$

Kde: F_{g1} je gravitační síla působící na těžiště prvního cyklisty
 F_{g2} je gravitační síla působící na těžiště druhého cyklisty
 l_1, l_2 jsou horizontální vzdálenosti těžišť obou jezdců od místa styku předního kola s vozovkou
 h_1, h_2 jsou vertikální vzdálenosti těžišť obou jezdců od místa styku předního kola s vozovkou
 a_s je celkové zpomalení dvojkola



Obr. 43: Síly působící na dvojkolo během 2. zátěžného stavu

Poloha těžišť jednotlivých cyklistů byla zvolena přibližně podle doporučení v odborné literatuře [10] zabývající se technikou jízdy na horských kolech, která udává, že se těžiště každého jezdce při náhlém brzdění či při sjezdu z prudkého kopce nachází nad jejich sedlem a pokud možno co nejnižší. Následně tedy byly stanoveny horizontální a vertikální vzdálenosti těžišť obou jezdců od bodu styku předního kola s vozovkou.

Jednotlivé vzdálenosti těžišť dvojice cyklistů od místa styku předního kola se zemí:

$$h_1 = 1,47782 \text{ m}; \quad h_2 = 1,43477 \text{ m}; \quad l_1 = 0,72058 \text{ m}; \quad l_2 = 1,48848 \text{ m}$$

Následuje výpočet celkového zpomalení tandemového kola:

$$a_s = \frac{F_{g1} \cdot l_1 + F_{g2} \cdot l_2}{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2} = \frac{120 \cdot 9,81 \cdot (0,72058 + 1,48848)}{120 \cdot (1,47782 + 1,43477)} = 7,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (97)$$

Celkové zrychlení působící na oba cyklisty je dáno vektorovým součtem zrychlení od setrvačných sil a tíhového zrychlení:

$$a_{c1} = a_{c2} = \sqrt{a_s^2 + g^2} = 12,312 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (98)$$

Výsledné celkové síly způsobené každým jezdce, jež zatěžují jejich dvojkolo, jsou tedy:

$$F_{c1} = F_{c2} = m_2 \cdot a_{c2} = 1477 \text{ N} \quad (99)$$

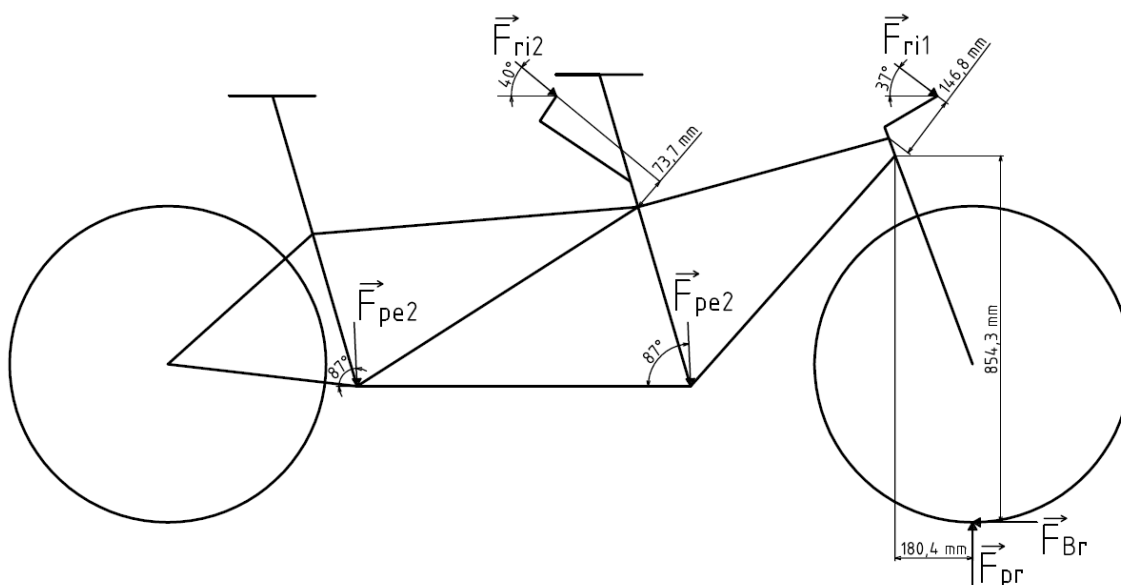
Celková síla se vektorově rozdělí na síly působící opět pod určitým úhlem, jak na řídítka, tak na pedály. Jelikož jsem polohu zmíněných těžišť volil přibližně a přitom zanedbal vliv tíhových sil dvojkola a samotných kol, vzniká zde drobná nepřesnost ve výpočtech. Tato menší chyba se projeví jako síla F_{za} ve statickém rozboru.

Použitím sinové věty byly výše uvedené celkové síly vektorově rozděleny mezi následující síly:

Síla na řídítka předního jezdce:	$F_{r1} = 1083,160855 \text{ N}$	pod úhlem 37°
Síla na pedály předního jezdce:	$F_{pe1} = 525,6598321 \text{ N}$	pod úhlem 87°
Síla na řídítka zadního jezdce:	$F_{r2} = 1134,539078 \text{ N}$	pod úhlem 40°
Síla na pedály zadního jezdce:	$F_{pe2} = 448,1484187 \text{ N}$	pod úhlem 87°

Druhá varianta zátěžného módu tedy zahrnuje obě síly na pedály $F_{pe1} = 525,66 \text{ N}$ pod úhlem 87° a $F_{pe2} = 448,15 \text{ N}$ pod stejným úhlem 87° . Dále se ještě dvojice cyklistů opírá o svá řídítka, kdy první cyklista na ně působí silou $F_{r1} = 1083,16 \text{ N}$ pod úhlem 37° a druhý jezdec pak silou $F_{r2} = 1134,54 \text{ N}$ pod úhlem 40° .

Podle obrázku č. 44 si lze všimnout, že bylo stejně jako u prvního zátěžného stavu opět využito Saint-Venantova principu, kdy jsme neznámé silové působení nahradili modelem jedné osamělé síly do určitého bodu či místa na dvojkole.



Obr. 44: Síly od zatížení posádkou a působící reakční a brzdná síla na dvojkolo

8.1. Statický rozbor rámu dvojkola

Pro určení napjatosti v samotném rámu dvojkola stejně jako u prvního zátěžného stavu nejprve zjistíme, jaké zatížení působí přímo na něj. Z tohoto důvodu byl opět postupně ekvivalentně nahrazen vliv obou řídítek i s představci, dále vliv první sedlové trubky, na které je připevněn představec pro řídítka druhého jezdce, a pevné přední vidlice. Vliv obou sedel a zadní sedlové trubky samozřejmě odpadá, neboť dvojice cyklistů brzdí ve stoje. Jelikož samotná konstrukce rámu váží přibližně 4 kg, lze tedy její vlastní hmotnost zanedbat.

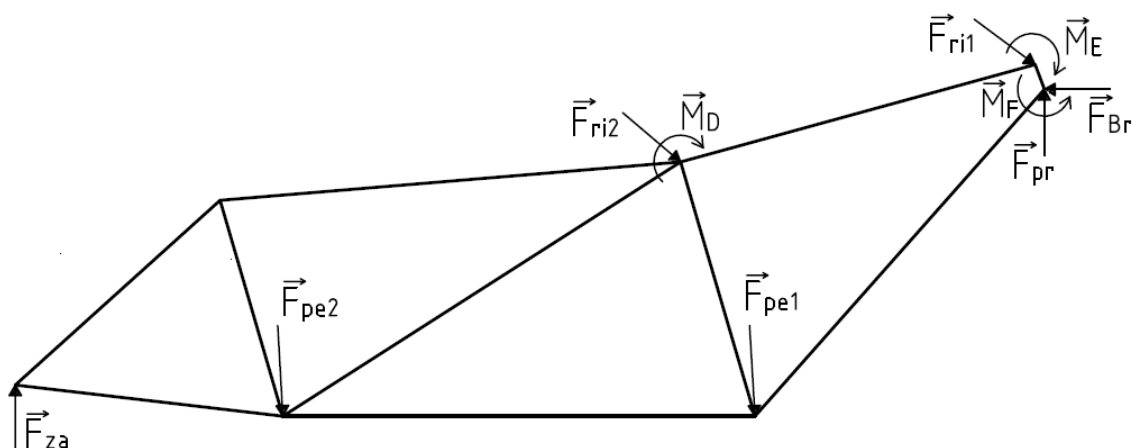
U jednotlivých komponentů dvojkola byly síly posunuty mimo své nositelky do bodů na tandemovém rámu. V důsledku toho zde vznikají přidané momenty, jejichž hodnoty jsou násobkem velikostí původních sil a jejich kolmých vzdáleností od určitého bodu rámové konstrukce dvojkola.

Hodnoty nově přidaných momentů jsou následující:

$$\text{pro první řídítka: } M_E = F_{ri1} \cdot 0,1468 = 159,014 \text{ Nm}$$

$$\text{pro druhá řídítka: } M_D = F_{ri2} \cdot 0,0737 = 83,616 \text{ Nm}$$

$$\text{pro přední vidlici: } M_F = -F_{Br} \cdot 0,8543 + F_{pr} \cdot 0,1804 \quad (100)$$



Obr. 45: Staticky ekvivalentní náhrada

Vnější statický rozbor

Počet použitelných podmínek:	$v = 3$	
Počet neznámých parametrů:	$\mu = 3$	
Míra statické neurčitosti:	$s = \mu - v = 0$	(101)

Z míry statické neurčitosti či také ze stupně statické určitosti plyne, že se jedná o vně staticky určitou úlohu.

Následující rovnice statické rovnováhy vycházejí z obr. 45:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{pe2} \cdot \cos(87^\circ) + F_{pe1} \cdot \cos(87^\circ) + F_{ri2} \cdot \cos(40^\circ) + F_{ri1} \cdot \cos(37^\circ) - F_{Br} = 0 \quad (102)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{pe2} \cdot \sin(87^\circ) - F_{pe1} \cdot \sin(87^\circ) - F_{ri2} \cdot \sin(40^\circ) - F_{ri1} \cdot \sin(37^\circ) + F_{pr} + F_{za} = 0 \quad (103)$$

Moment je počítán k bodu F na rámu dvojkola.

$$\sum M_F = 0$$

$$-F_{ri1} \cdot 0,02339 + F_{ri2} \cdot 0,47549 + F_{pe1} \cdot 0,50513 + F_{pe2} \cdot 1,27796 - M_E - M_D + M_F - F_{za} \cdot 1,69342 = 0 \quad (104)$$

Řešením této soustavy rovnic jsou získány velikosti reakčních sil na části tandemového rámu, tedy $F_{Br} = 1785 \text{ N}$, $F_{pr} = 2349 \text{ N}$ a $F_{za} = 4,951 \text{ N}$. Právě síla F_{za} představuje vzniklou chybu, způsobenou v nepřesném určení těžiště obou jezdců a zanedbáním vlastních hmotností jak rámu dvojkola, tak samotných kol. Pokud se podíváme na velikost této síly, zjistíme, že vzniklá chyba je opravdu velmi malá.

Zpětně můžeme dle rovnice (100) dopočítat moment působící v bodě F. Velikost tohoto momentu se rovná $M_F = -1101 \text{ Nm}$. Vidíme tedy, že daný moment působí ve skutečnosti opačným směrem.

Vnitřní statický rozbor

$$\begin{array}{ll} \text{Počet použitelných podmínek:} & v = 3 \\ \text{Počet neznámých parametrů:} & \mu = 15 \\ \text{Míra statické neurčitosti:} & s = \mu - v = 12 \end{array} \quad (105)$$

Úloha je tedy opět vnitřně dvanáctkrát staticky neurčitá.

Aby se stal uzavřený tandemový rám vůbec řešitelnou úlohou, bylo zapotřebí provést částečné uvolnění výpočtového modelu rámu dvojkola a zavést příslušné podmínky spojitosti deformace. Jelikož právě částečné uvolnění a zavedení podmínek spojitosti deformace jsou shodné jako u prvního zatěžovacího módu, nebudou v tomto případě už nadále uváděny.

8.2. Výsledné vnitřní silové účinky

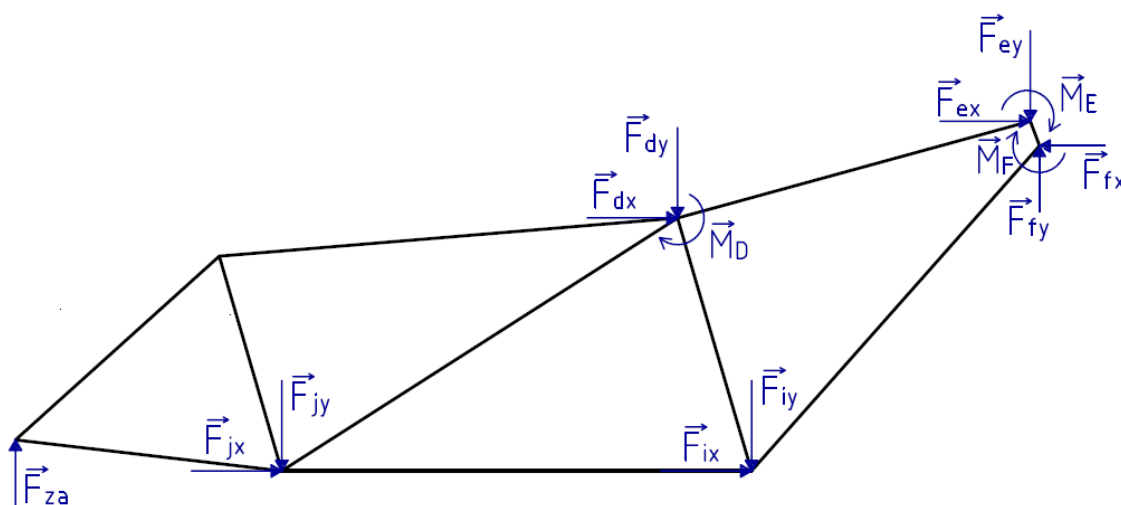
Pro stanovení složek VVÚ byla použita opět stejná znaménková konvence. Normálová síla N v daném řezu je kladná, směřuje-li ven z prutu a tedy způsobuje-li tah. Posouvající sílu T lze považovat za kladnou, pokud otáčí elementem v řezu a to podle směru hodinových ručiček. A nakonec ohybový moment M_{oz} můžeme uvažovat v řezu jako kladný, jestliže deformuje střednici prutu do konvexního tvaru.

V řezech číslo 1 až 7 se uvolňovalo „zleva“, ale v dalších řezech číslo 8 až 14 jsem naopak uvolňoval „zprava“. Hodnoty vstupující do výpočtu pro druhý zátěžný stav jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 6: Hodnoty sil a momentů vstupující do výpočtu

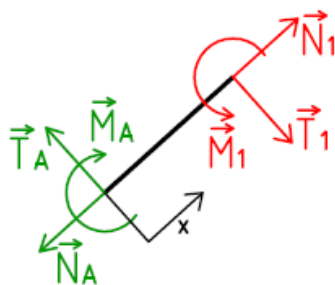
Označení síly (momentu)	Velikost
F_{za}	4,951 N
F_{jx}	23,454 N
F_{jy}	447,536 N
F_{ix}	27,511 N
F_{iy}	524,940 N
F_{dx}	869,108 N
F_{dy}	729,268 N
M_D	83,616 Nm
F_{ey}	651,886 N
F_{ex}	865,082 N
M_E	159,014 Nm
M_F	1101,000 Nm
F_{fx}	1785,000 N
F_{fy}	2349,000 N

Nutno zmínit, že uvažuji moment M_F již se správným směrem jeho působení. Proto je v tabulce č. 6 uveden jako kladný a v následujícím obrázku už má opačný směr než na obrázku č. 45.



Obr. 46: Orientace sil a momentů

Zobrazení řezů a stanovení VVÚ

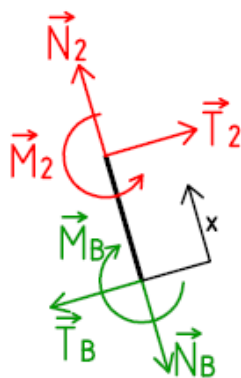


Obr. 47: Řez 1

$$N_1 = N_A \quad (106)$$

$$T_1 = T_A \quad (107)$$

$$M_1 = T_A \cdot x + M_A \quad (108)$$

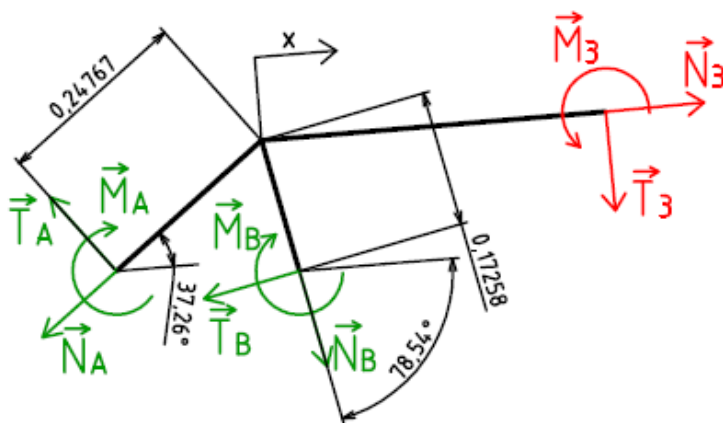


Obr. 48: Řez 2

$$N_2 = N_B \quad (109)$$

$$T_2 = T_B \quad (110)$$

$$M_2 = T_B \cdot x + M_B \quad (111)$$

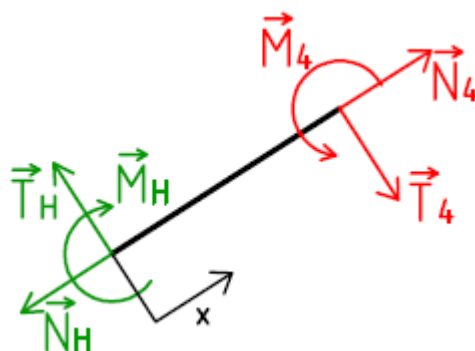


Obr. 49: Řez 3

$$N_3 = N_A \cdot \cos(37,26^\circ) + T_A \cdot \cos(52,74^\circ) + T_B \cdot \cos(11,46^\circ) - N_B \cdot \cos(78,54^\circ) \quad (112)$$

$$T_3 = -N_A \cdot \sin(37,26^\circ) + T_A \cdot \sin(52,74^\circ) - T_B \cdot \sin(11,46^\circ) - N_B \cdot \sin(78,54^\circ) \quad (113)$$

$$M_3 = -N_A \cdot \sin(37,26^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,24767 + T_A \cdot \sin(52,74^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(78,54^\circ) \cdot x + T_B \cdot 0,17258 - T_B \cdot \sin(11,46^\circ) \cdot x + M_A + M_B \quad (114)$$

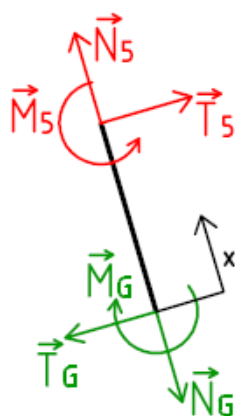


Obr. 50: Řez 4

$$N_4 = N_H \quad (115)$$

$$T_4 = T_H \quad (116)$$

$$M_4 = T_H \cdot x + M_H \quad (117)$$

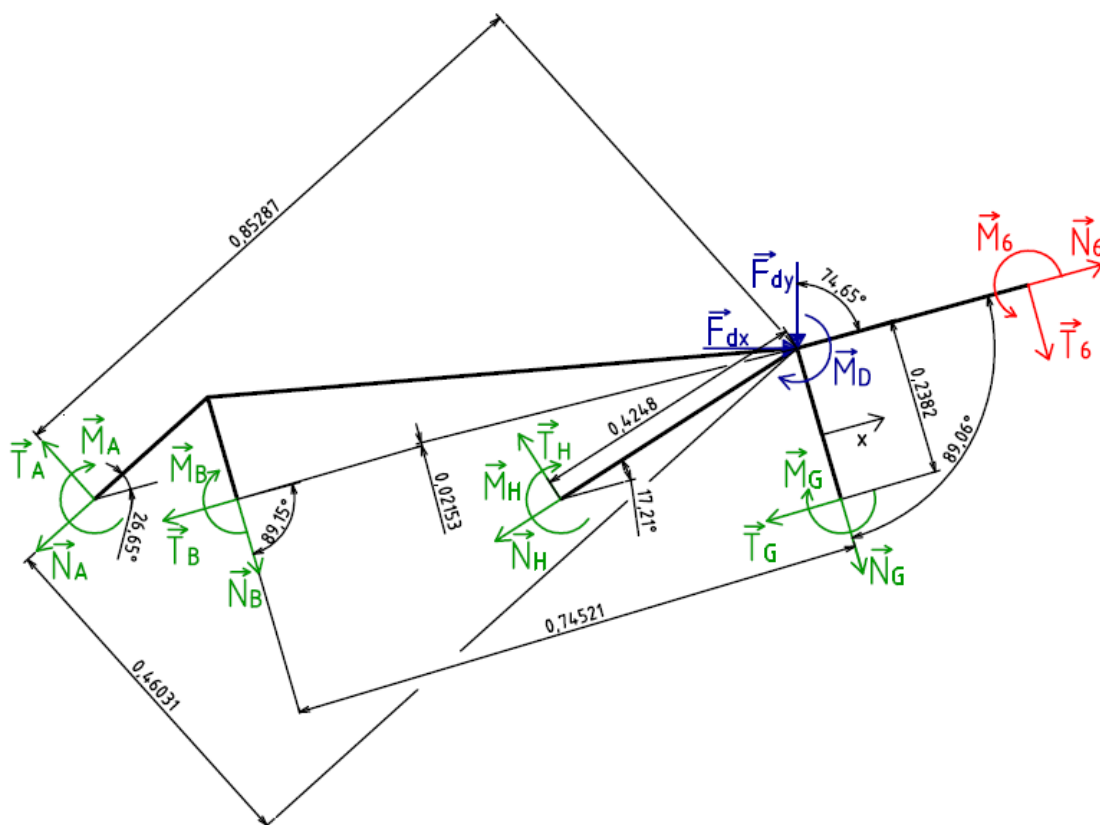


Obr. 51: Řez 5

$$N_5 = N_G \quad (118)$$

$$T_5 = T_G \quad (119)$$

$$M_5 = T_G \cdot x + M_G \quad (120)$$

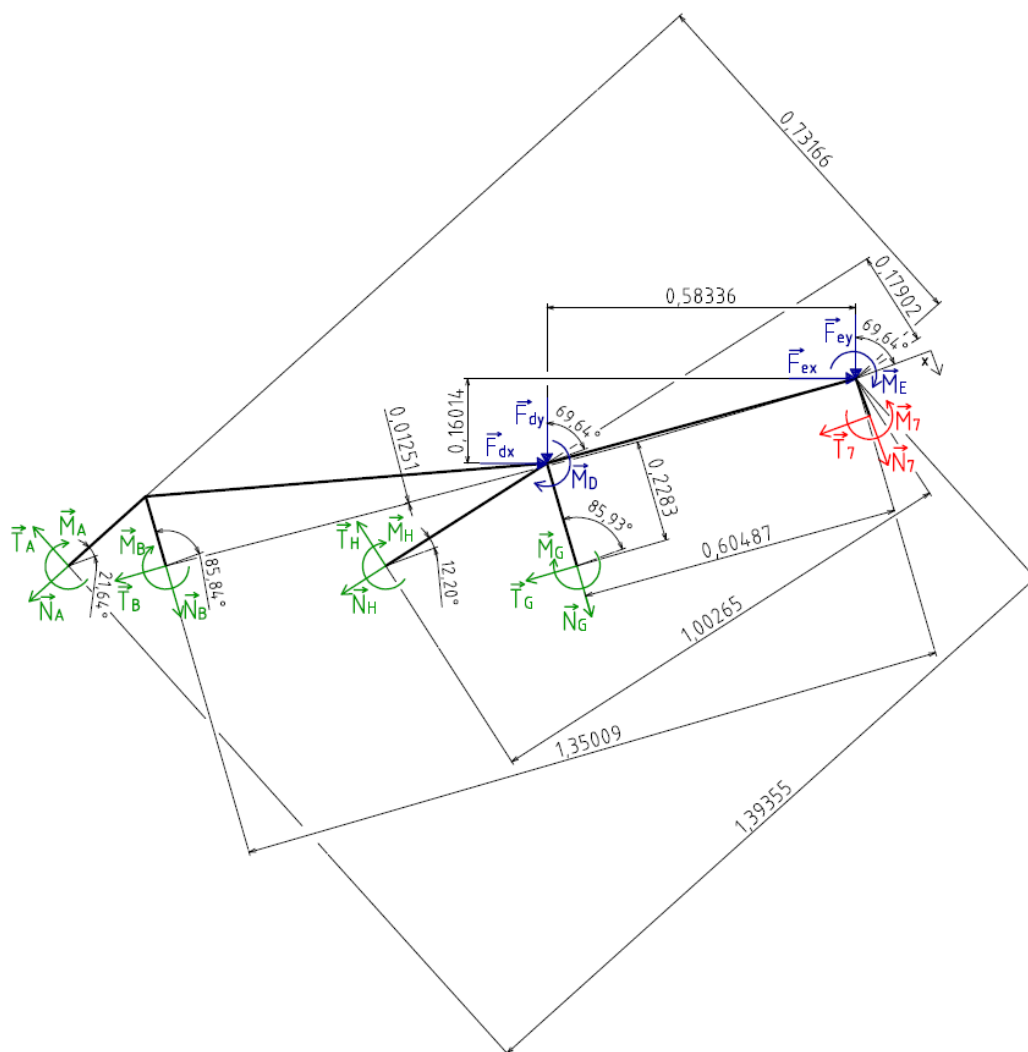


Obr. 52: Řez 6

$$N_6 = N_A \cdot \cos(26,65^\circ) + T_A \cdot \cos(63,35^\circ) + T_B \cdot \cos(0,85^\circ) - \\ - N_B \cdot \cos(89,15^\circ) + N_H \cdot \cos(17,21^\circ) + T_H \cdot \cos(72,79^\circ) + T_G \cdot \cos(0,94^\circ) - \\ - N_G \cdot \cos(89,06^\circ) - F_{dx} \cdot \cos(15,35^\circ) + F_{dy} \cdot \cos(74,65^\circ) \quad (121)$$

$$T_6 = -N_A \cdot \sin(26,65^\circ) + T_A \cdot \sin(63,35^\circ) - T_B \cdot \sin(0,85^\circ) - \\ - N_B \cdot \sin(89,15^\circ) - N_H \cdot \sin(17,21^\circ) + T_H \cdot \sin(72,79^\circ) - T_G \cdot \sin(0,94^\circ) - \\ - N_G \cdot \sin(89,06^\circ) - F_{dx} \cdot \sin(15,35^\circ) - F_{dy} \cdot \sin(74,65^\circ) \quad (122)$$

$$M_6 = -N_A \cdot 0,46031 - N_A \cdot \sin(26,65^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,85287 - N_B \cdot 0,74521 + \\ + T_A \cdot \sin(63,35^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(89,15^\circ) \cdot x - T_B \cdot \sin(0,85^\circ) \cdot x + \\ + T_B \cdot 0,02153 + T_H \cdot 0,4248 - N_H \cdot \sin(17,21^\circ) \cdot x + T_H \cdot \sin(72,79^\circ) \cdot x - \\ - N_G \cdot \sin(89,06^\circ) \cdot x + T_G \cdot 0,2382 - T_G \cdot \sin(0,94^\circ) \cdot x + M_A + M_B - \\ - F_{dx} \cdot \sin(15,35^\circ) \cdot x - F_{dy} \cdot \sin(74,65^\circ) \cdot x + M_H + M_G + M_D \quad (123)$$

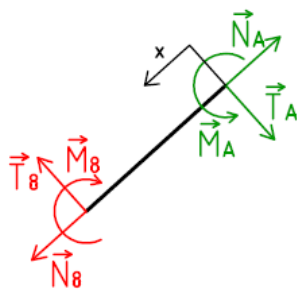


Obr. 53: Řez 7

$$\begin{aligned}
 N_7 = & -N_A \cdot \cos(68,36^\circ) + T_A \cdot \cos(21,64^\circ) + T_B \cdot \cos(85,84^\circ) - \\
 & -N_B \cdot \cos(4,16^\circ) - N_H \cdot \cos(77,80^\circ) + T_H \cdot \cos(12,20^\circ) + T_G \cdot \cos(85,93^\circ) - \\
 & -N_G \cdot \cos(4,07^\circ) - F_{dx} \cdot \cos(69,64^\circ) - F_{dy} \cdot \cos(20,36^\circ) - F_{ey} \cdot \cos(20,36^\circ) - \\
 & -F_{ex} \cdot \cos(69,64^\circ)
 \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned}
 T_7 = & -N_A \cdot \sin(68,36^\circ) - T_A \cdot \sin(21,64^\circ) - T_B \cdot \sin(85,84^\circ) - \\
 & -N_B \cdot \sin(4,16^\circ) - N_H \cdot \sin(77,80^\circ) - T_H \cdot \sin(12,20^\circ) - T_G \cdot \sin(85,93^\circ) - \\
 & -N_G \cdot \sin(4,07^\circ) + F_{dx} \cdot \sin(69,64^\circ) - F_{dy} \cdot \sin(20,36^\circ) - F_{ey} \cdot \sin(20,36^\circ) + \\
 & + F_{ex} \cdot \sin(69,64^\circ)
 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned}
 M_7 = & -N_A \cdot 0,73166 - N_A \cdot \sin(68,36^\circ) \cdot x + T_A \cdot 1,39355 - N_B \cdot 1,35009 - \\
 & -T_A \cdot \sin(21,64^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(4,16^\circ) \cdot x + T_B \cdot 0,01251 - N_H \cdot 0,17902 - \\
 & -T_B \cdot \sin(85,84^\circ) \cdot x - N_H \cdot \sin(77,80^\circ) \cdot x - T_H \cdot \sin(12,20^\circ) \cdot x + \\
 & + T_H \cdot 1,00265 - N_G \cdot \sin(4,07^\circ) \cdot x - N_G \cdot 0,60487 - T_G \cdot \sin(85,93^\circ) \cdot x + \\
 & + T_G \cdot 0,22283 - F_{dx} \cdot 0,16014 + F_{dx} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x - F_{dy} \cdot 0,58336 - \\
 & -F_{dy} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x + F_{ex} \cdot \sin(69,64^\circ) \cdot x - F_{ey} \cdot \sin(20,36^\circ) \cdot x + \\
 & + M_A + M_B + M_H + M_G + M_D + M_E
 \end{aligned} \quad (126)$$

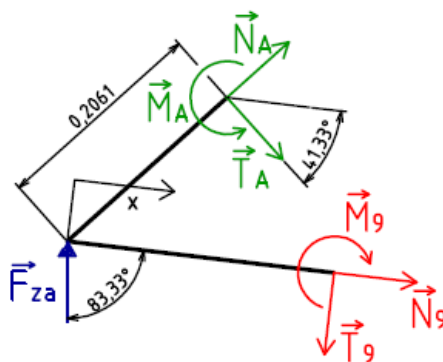


Obr. 54: Řez 8

$$N_8 = N_A \quad (127)$$

$$T_8 = T_A \quad (128)$$

$$M_8 = -T_A \cdot x + M_A \quad (129)$$

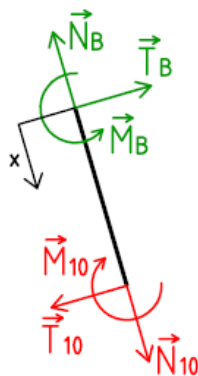


Obr. 55: Řez 9

$$N_9 = -N_A \cdot \cos(48,67^\circ) - T_A \cdot \cos(41,33^\circ) + F_{za} \cdot \cos(83,33^\circ) \quad (130)$$

$$T_9 = N_A \cdot \sin(48,67^\circ) - T_A \cdot \sin(41,33^\circ) + F_{za} \cdot \sin(83,33^\circ) \quad (131)$$

$$M_9 = -N_A \cdot \sin(48,67^\circ) \cdot x - T_A \cdot 0,2061 + T_A \cdot \sin(41,33^\circ) \cdot x - F_{za} \cdot \sin(83,33^\circ) \cdot x + M_A \quad (132)$$

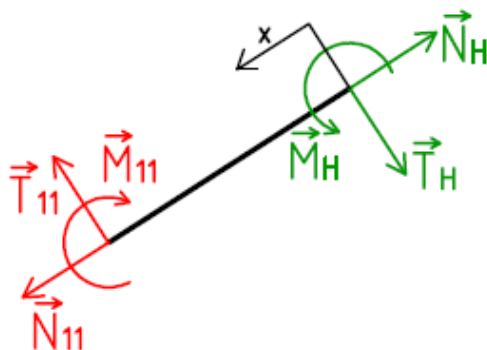


Obr. 56: Řez 10

$$N_{10} = N_B \quad (133)$$

$$T_{10} = T_B \quad (134)$$

$$M_{10} = -T_B \cdot x + M_B \quad (135)$$

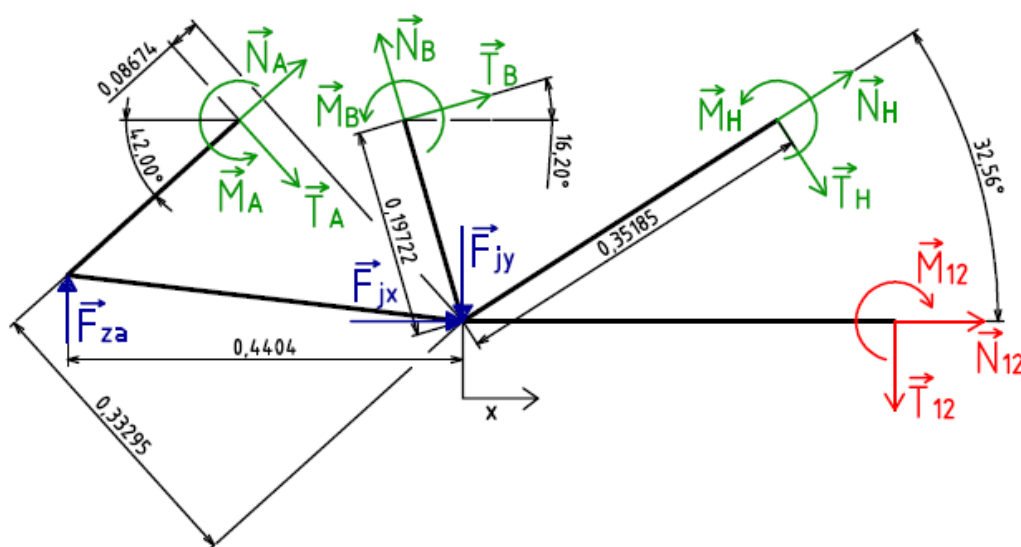


Obr. 57: Řez 11

$$N_{11} = N_H \quad (136)$$

$$T_{11} = T_H \quad (137)$$

$$M_{11} = -T_H \cdot x + M_H \quad (138)$$

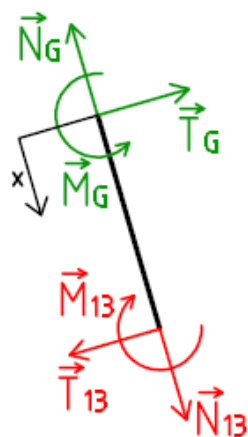


Obr. 58: Řez 12

$$N_{12} = -N_A \cdot \cos(42^\circ) - T_A \cdot \cos(48^\circ) - T_B \cdot \cos(16,20^\circ) + N_B \cdot \cos(73,80^\circ) - N_H \cdot \cos(32,56^\circ) - T_H \cdot \cos(57,44^\circ) - F_{jx} \quad (139)$$

$$T_{12} = +F_{za} + N_A \cdot \sin(42^\circ) - T_A \cdot \sin(48^\circ) + T_B \cdot \sin(16,20^\circ) + N_B \cdot \sin(73,80^\circ) - F_{jy} - T_H \cdot \sin(57,44^\circ) + N_H \cdot \sin(32,56^\circ) \quad (140)$$

$$M_{12} = -N_A \cdot 0,33295 - N_A \cdot \sin(42^\circ) \cdot x + T_A \cdot 0,08674 + T_A \cdot \sin(48^\circ) \cdot x - F_{za} \cdot 0,4404 - T_B \cdot 0,19722 - T_B \cdot \sin(16,20^\circ) \cdot x - N_B \cdot \sin(73,80^\circ) \cdot x + F_{jy} \cdot x - T_H \cdot 0,35185 + T_H \cdot \sin(57,44^\circ) \cdot x - N_H \cdot \sin(32,56^\circ) \cdot x + M_A + M_B + M_H - F_{za} \cdot x \quad (141)$$

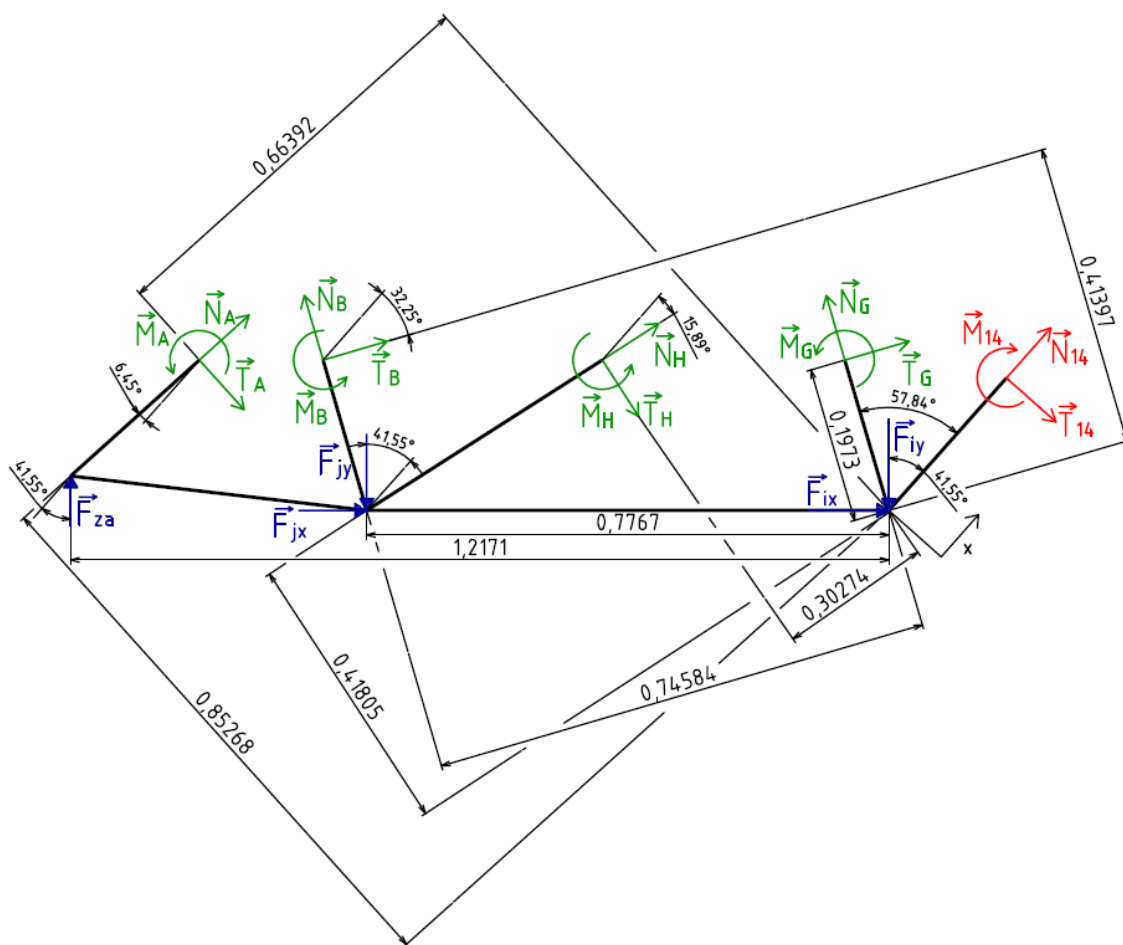


Obr. 59: Řez 13

$$N_{13} = N_G \quad (142)$$

$$T_{13} = T_G \quad (143)$$

$$M_{13} = -T_G \cdot x + M_G \quad (144)$$



Obr. 60: Řez 14

$$\begin{aligned}
N_{14} = & -F_{za} \cdot \cos(41,55^\circ) - N_A \cdot \cos(6,45^\circ) + T_A \cdot \cos(83,55^\circ) - \\
& -N_B \cdot \cos(57,75^\circ) - T_B \cdot \cos(32,25^\circ) + F_{jy} \cdot \cos(41,55^\circ) - \\
& -F_{jx} \cdot \cos(48,45^\circ) - N_H \cdot \cos(15,89^\circ) + T_H \cdot \cos(74,11^\circ) - \\
& -N_G \cdot \cos(57,84^\circ) - T_G \cdot \cos(32,16^\circ) + F_{iy} \cdot \cos(41,55^\circ) - \\
& -F_{ix} \cdot \cos(48,45^\circ)
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
T_{14} = & F_{za} \cdot \sin(41,55^\circ) - N_A \cdot \sin(6,45^\circ) - T_A \cdot \sin(83,55^\circ) + \\
& +N_B \cdot \sin(57,75^\circ) - T_B \cdot \sin(32,25^\circ) - F_{jy} \cdot \sin(41,55^\circ) - \\
& -F_{jx} \cdot \sin(48,45^\circ) - N_H \cdot \sin(15,89^\circ) - T_H \cdot \sin(74,11^\circ) + \\
& +N_G \cdot \sin(57,84^\circ) - T_G \cdot \sin(32,16^\circ) - F_{iy} \cdot \sin(41,55^\circ) - \\
& -F_{ix} \cdot \sin(48,45^\circ)
\end{aligned} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}
M_{14} = & -F_{za} \cdot 1,2171 - F_{za} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x + N_A \cdot \sin(6,45^\circ) \cdot x - \\
& -N_A \cdot 0,85268 + T_A \cdot 0,66392 + T_A \cdot \sin(83,55^\circ) \cdot x - N_B \cdot 0,74584 - \\
& -N_B \cdot \sin(57,75^\circ) \cdot x - T_B \cdot 0,41397 + T_B \cdot \sin(32,25^\circ) \cdot x - N_H \cdot 0,41805 + \\
& +N_H \cdot \sin(15,89^\circ) \cdot x + T_H \cdot 0,30274 + T_H \cdot \sin(74,11^\circ) \cdot x + F_{jy} \cdot 0,7767 + \\
& +F_{jy} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x + F_{jx} \cdot \sin(48,45^\circ) \cdot x - N_G \cdot \sin(57,84^\circ) \cdot x - \\
& -T_G \cdot 0,1973 + T_G \cdot \sin(32,16^\circ) \cdot x + F_{iy} \cdot \sin(41,55^\circ) \cdot x + M_A + M_B + \\
& +F_{ix} \cdot \sin(48,45^\circ) \cdot x + M_H + M_G
\end{aligned} \tag{147}$$

8.3. Výpočet VVÚ

Před zahájením výpočtu výsledných vnitřních účinků je třeba připomenout, že stanovené průřezové charakteristiky v prvním zatěžovacím stavu zůstávají zachovány.

Nejdříve musíme opět vypočítat neznámé hodnoty vnitřních vazebných sil v prutech (N_A , T_A , M_A , N_B , T_B , M_B , N_H , T_H , M_H , N_G , T_G , M_G). Pro získání jejich velikostí použijeme stejný způsob a rovnice jako u prvního zatěžného stavu. Poté tyto námi hledané neznámé dosadíme do již sestavených rovnic VVÚ a tím zjistíme velikosti a vykreslíme skutečné průběhy výsledných vnitřních silových účinků v jednotlivých prutech výpočtového modelu rámové konstrukce dvojkola.

Řešením stejných rovnic (66 - 77) v matematickém softwaru Maple 13 jsme opět získali následující soustavu dvanácti lineárních rovnic o dvanácti neznámých.

$$\begin{aligned}
& 2,914927869 \cdot 10^{-4} \cdot N_A - 3,709142622 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 4,297730525 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
& -3,143220004 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 2,648593308 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 5,300692358 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
& +3,562586424 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 5,261084444 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 7,736505421 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
& -1,862795590 \cdot 10^{-4} \cdot T_H - 3,629101521 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 8,373202099 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& -0,06010163878 = 0
\end{aligned} \tag{148}$$

$$\begin{aligned}
& 3,562586424 \cdot 10^{-4} \cdot N_A - 5,543841292 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
& -5,937841338 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 4,078210176 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
& +5,253731681 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 4,204294147 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 9,179207731 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
& -2,993256064 \cdot 10^{-4} \cdot T_H - 4,695040036 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 1,369315996 \cdot 10^{-4} \cdot N_G - \\
& -0,05558303815 = 0
\end{aligned} \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
& 7,736505419 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 9,054352915 \cdot 10^{-5} \cdot T_A - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
& -3,608853879 \cdot 10^{-6} \cdot T_G - 7,035081128 \cdot 10^{-5} \cdot M_G - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
& +9,179207729 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 2,345047568 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 2,855908039 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
& -5,038243764 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 2,217018686 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& -0,02903704886 = 0
\end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
& 8,373202099 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 1,410184417 \cdot 10^{-4} \cdot T_A - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_B - \\
& -1,932344732 \cdot 10^{-5} \cdot T_G - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_G - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_A + \\
& +1,369315996 \cdot 10^{-4} \cdot N_B + 6,322305154 \cdot 10^{-6} \cdot T_B + 2,217018686 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
& -9,443168065 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot M_H + 4,848753321 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& -0,009871861267 = 0
\end{aligned} \tag{151}$$

$$\begin{aligned}
& -3,709906779 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,124101758 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 6,429330447 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& +6,405516217 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 4,210095662 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 6,197898547 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& -5,543644156 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 3,433945657 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 9,058533939 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
& +3,077390332 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 4,830912085 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,410146332 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
& +0,05011508332 = 0
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}
& 5,245356199 \cdot 10^{-5} \cdot N_A - 3,433945657 \cdot 10^{-5} \cdot T_A - 5,501428907 \cdot 10^{-5} \cdot M_B + \\
& +2,990426285 \cdot 10^{-6} \cdot T_G - 3,010284085 \cdot 10^{-5} \cdot M_G - 5,245409304 \cdot 10^{-5} \cdot M_A + \\
& +4,204743367 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 3,128155619 \cdot 10^{-5} \cdot T_B + 2,333121168 \cdot 10^{-5} \cdot N_H - \\
& -1,670475221 \cdot 10^{-5} \cdot T_H - 8,064378076 \cdot 10^{-5} \cdot M_H + 6,302803293 \cdot 10^{-6} \cdot N_G - \\
& -0,02781184875 = 0
\end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned}
& -1,862984307 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 3,077390332 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 4,190805715 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 2,678994893 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 2,993106761 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 1,670475219 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 5,040526993 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
& + 2,196192104 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 2,746632514 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 9,442406918 \cdot 10^{-5} \cdot N_G + \\
& + 0,02457031399 = 0
\end{aligned} \tag{154}$$

$$\begin{aligned}
& -3,151045526 \cdot 10^{-5} \cdot N_A + 6,405516217 \cdot 10^{-5} \cdot T_A + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_B + \\
& + 1,857722138 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 5,875852486 \cdot 10^{-5} \cdot M_G + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_A - \\
& - 5,939805831 \cdot 10^{-5} \cdot N_B + 2,990426285 \cdot 10^{-6} \cdot T_B - 3,688675257 \cdot 10^{-6} \cdot N_H + \\
& + 4,190805715 \cdot 10^{-5} \cdot T_H + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot M_H - 1,934297061 \cdot 10^{-5} \cdot N_G - \\
& - 0,009011833336 = 0
\end{aligned} \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
& -5,300692357 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,197898547 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 8,437703881 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 2,062760406 \cdot 10^{-3} \cdot M_A - \\
& - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 5,245409304 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
& + 0,06992836918 = 0
\end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned}
& -4,297730525 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 6,429330447 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 1,051578508 \cdot 10^{-3} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 8,437703881 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 5,777404367 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 5,501428908 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,638409436 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
& + 0,07058517211 = 0
\end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned}
& -3,629101519 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 4,830912085 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,375383607 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 5,532850536 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 4,695040036 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 8,064378076 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 1,049201361 \cdot 10^{-4} \cdot N_H + \\
& + 2,746632515 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 8,499898615 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
& + 0,07058517211 = 0
\end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned}
& -2,648593308 \cdot 10^{-4} \cdot N_A + 4,210095664 \cdot 10^{-4} \cdot T_A + 3,87884101 \cdot 10^{-4} \cdot M_B + \\
& + 5,875852486 \cdot 10^{-5} \cdot T_G + 6,326121596 \cdot 10^{-4} \cdot M_G + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_A - \\
& - 4,078210176 \cdot 10^{-4} \cdot N_B - 3,010284085 \cdot 10^{-5} \cdot T_B - 7,035081128 \cdot 10^{-5} \cdot N_H + \\
& + 2,678994893 \cdot 10^{-4} \cdot T_H + 3,878841010 \cdot 10^{-4} \cdot M_H - 1,187136471 \cdot 10^{-4} \cdot N_G + \\
& + 0,04251704985 = 0
\end{aligned} \tag{159}$$

Také tato nově vniklá soustava rovnic se i nadále řešila ve zmíněném programu Maple 13 a to pomocí jednoduché funkce *fsolve*. Výsledkem tohoto řešení jsou hledané vnitřní vazebné síly v prutech, které ukazuje následující tabulka.

Tabulka 7: Vnitřní vazebné síly v prutech

Vazebné síly v prutech	Velikosti
N_A	-35,9491 N
T_A	6,3987 N
M_A	-1,2671 Nm
N_B	-10,6407 N
T_B	-89,1256 N
M_B	4,9467 Nm
N_G	-64,5783 N
T_G	579,3686 N
M_G	-28,5184 Nm
N_H	1401,2326 N
T_H	23,5963 N
M_H	13,9377 Nm

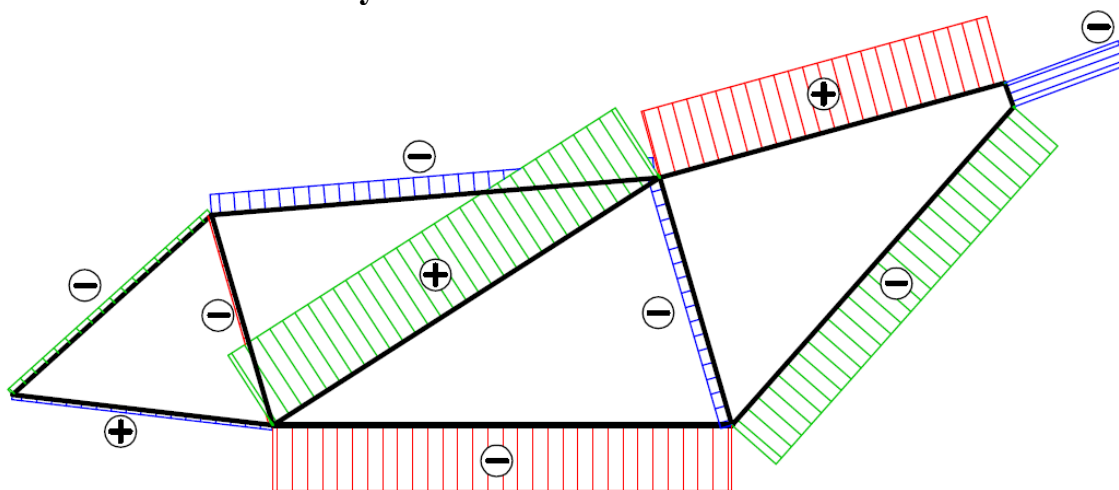
Po dosazení vypočtených hodnot vnitřních vazebných sil v místech řezu prutů do počátečních rovnic výsledných vnitřních silových účinků (106 - 147) získáme skutečné velikosti a průběhy normálových a posouvajících sil a také ohybových momentů v jednotlivých prutech. Tabulka č. 8 udává skutečné velikosti normálových a posouvajících sil a dále průběhy ohybových momentů pro jednotlivé pruty, ze kterých je výpočtový model rámu dvojkola složen.

Tabulka 8: Výsledné vnitřní účinky

Číslo prutu	Normálová síla	Posouvající síla	Ohybový moment
$i [-]$	$N_i [N]$	$T_i [N]$	$M_i [Nm]$
1	-35,9491	6,3987	$6,3987 \cdot x - 1,2671$
2	-10,6407	-89,1256	$-89,1256 \cdot x + 4,9467$
3	-109,9724	54,9939	$54,9939 \cdot x - 10,1169$
4	1401,2326	23,5963	$23,5963 \cdot x + 13,9377$
5	-64,5783	579,3686	$579,3686 \cdot x - 28,5184$
6	1162,5524	-1236,4978	$248,7599 - 1236,4978 \cdot x$
7	-2042,3852	-681,8602	$-340,2639 - 681,8602 \cdot x$
8	-35,9491	6,3987	$-6,3987 \cdot x - 1,2671$
9	19,5107	-26,303	$-2,5858 + 26,303 \cdot x$
10	-10,6407	-89,1256	$89,1256 \cdot x + 4,9467$
11	1401,2326	23,5963	$-23,5963 \cdot x + 13,9377$
12	-1112,0997	227,753	$37,2362 - 227,753 \cdot x$
13	-64,5783	579,3686	$-579,3686 \cdot x - 28,5184$
14	-989,5645	-1413,0341	$-282,544 + 1413,0341 \cdot x$

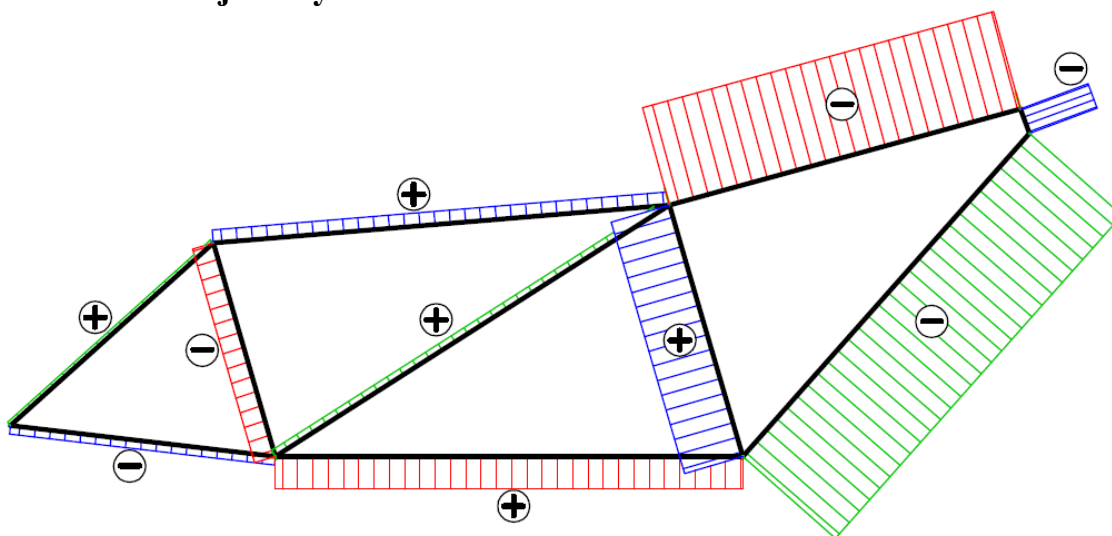
8.4. Grafické znázornění průběhů VVÚ

Normálové složky VVÚ



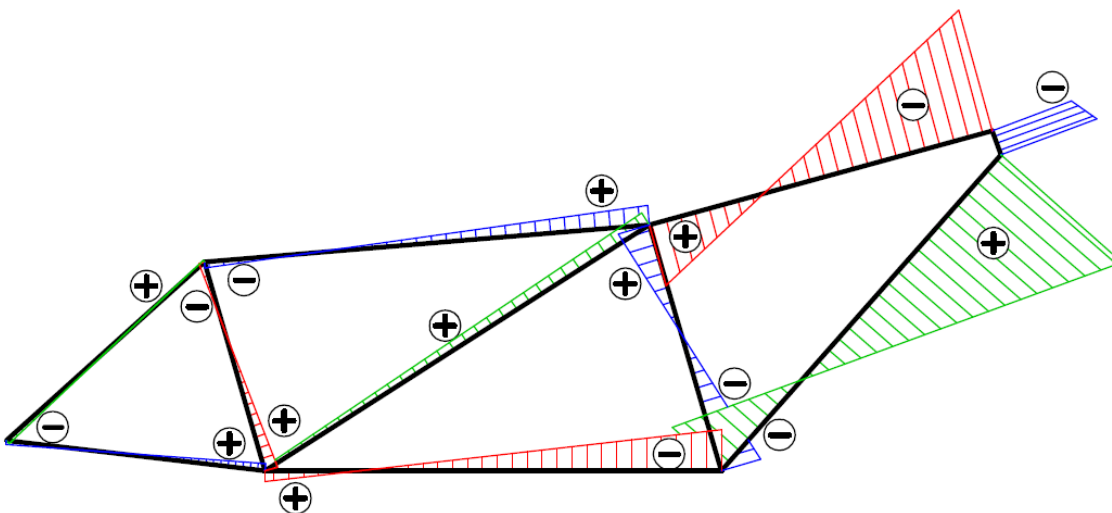
Obr. 61: Průběh normálových sil v prutech

Posouvající síly



Obr. 62: Průběh posouvajících sil v prutech

Ohybové momenty



Obr. 63: Průběh ohybových momentů v prutech

8.5. Výpočet napětí

Celkové napětí v jednotlivých prutech se určí stejným způsobem jako při prvním zátěžném stavu. Následující tabulka udává napětí v nebezpečných oblastech tandemového rámu, tedy v místech, kde jsou jednotlivé trubky svařeny. Tyto místa či body představují všechny spojnice prutů našeho výpočtového modelu.

Tabulka 9: Napětí v nebezpečných místech

Místo	Napětí od tahu / tlaku	Napětí od ohybu	Nominální napětí	Celkové napětí
i [-]	σ_N [MPa]	σ_o [MPa]	σ_{nom} [MPa]	σ_{max} [MPa]
C	-0,059831	-7,3883	7,4481	14,8962
D	6,2456	140,2704	146,51598	293,03197
E	6,2456	-281,5217	287,7673	575,5346
F	-4,4744	280,6851	285,1595	570,3191
I	-4,4744	-108,3037	112,7781	225,5562
J	-5,0285	14,27325	19,3017	38,6035
K	-0,14184	-2,7826	2,9244	5,8488

8.6. Určení bezpečnosti

Nyní bude vypočtena bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti, jež je dána poměrem mezi smluvní mezí kluzu materiálu a maximálním napětím. Také se zde stanoví bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pevnosti či porušení materiálu, která se definuje jako poměr meze pevnosti materiálu ku maximálnímu napětí. Abychom zjistili minimální bezpečnost celého rámu dvojkola, je nutné uvažovat místo, kde se nachází maximální absolutní hodnota napětí.

Z předcházející tabulky můžeme vyčíst, že se místo největšího působení celkového napětí nachází v bodě E, čili v oblasti spojení přední hlavové trubky s horní rámovou trubicí. Celkovou bezpečnost tedy počítáme, jako poměr minimální hodnoty smluvní meze kluzu hliníkové slitiny EN AW-7020 T6 ku maximálnímu napětí v místě E.

$$k_{MSP} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{max}} = \frac{280}{575,5346} = 0,4865 \quad (160)$$

Ze stanovené bezpečnosti vyplývá, že v daném místě dochází ke značné plastické deformaci. Vzhledem k velmi nízké výše vypočtené bezpečnosti zjistíme, zdali náhodou nedojde k porušení spojitosti materiálu. Z toho důvodu určíme bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pevnosti či porušení právě poměrem mezi minimální hodnotou meze pevnosti zmíněné slitiny a maximální velikostí napětí v místě E.

$$k_{P1} = \frac{R_m}{\sigma_{max}} = \frac{350}{575,5346} = 0,608 \quad (161)$$

Jelikož i u této hodnoty bezpečnosti platí, že $k < 1$, proto při druhém zátěžném stavu dochází k úplnému porušení spojitosti trubky s označením 6 v místě E. Je tedy zřejmé, že rám dvojkola tento zatěžovací mód nevydrží. Na rozdíl od prvního zátěžného stavu, kde to není tak jasné, zde můžeme říct, že zcela bez pochyby bude při tomto zatížení překročen i mezní stav deformace, kdy rám tandemového kola už nebude dále použitelný.

V tabulce č. 9 navíc vidíme, že k úplnému porušení spojitosti materiálu nedojde jen v místě E, ale také v místě F, kde bezpečnost vůči meznímu stavu porušení je následující:

$$k_{P2} = \frac{R_m}{\sigma_{max}} = \frac{350}{570,3191} = 0,61 \quad (162)$$

Řešením tohoto problému by byla změna rámových trubek označených čísly 6 a 14. Návrh na vylepšení konstrukce rámu tandemového kola bude ukázán později.

8.7. Stanovení posuvu

Zde opět určíme posuv ve vybraném místě rámové konstrukce dvojkola. Výpočet provedeme podobně jako u předešlého zátěžného stavu. Tentokrát se zaměříme na posuv v bodě D, tedy v místě spojení přední sedlové trubky s horní rámovou trubicí. Posuv stanovíme ve vodorovném směru, a proto energii napjatosti budeme parciálně derivovat podle síly F_{dx} .

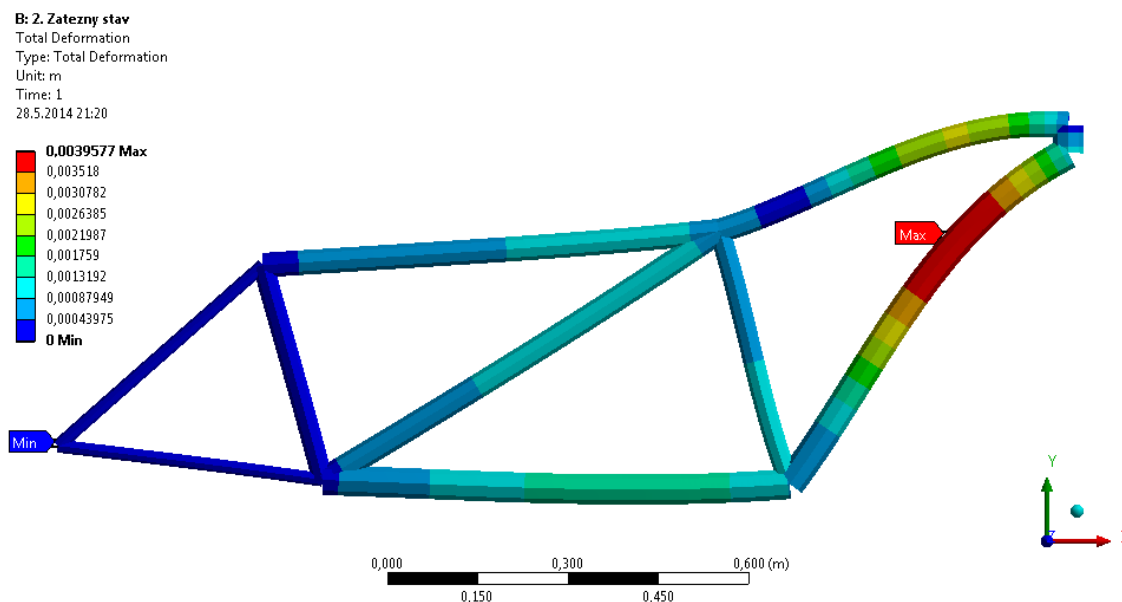
$$\begin{aligned}
u_{Dx} = \frac{\partial W}{\partial F_{dx}} = \frac{1}{E} \cdot & \left(\int_0^{0,24767} \frac{M_1}{J_{Z1}} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,17258} \frac{M_2}{J_{Z2}} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial F_{dx}} dx + \right. \\
& + \int_0^{0,76037} \frac{M_3}{J_{Z3}} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,4248} \frac{M_4}{J_{Z4}} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,2382} \frac{M_5}{J_{Z5}} \cdot \frac{\partial M_5}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,60495} \frac{M_6}{J_{Z6}} \cdot \frac{\partial M_6}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,0434} \frac{M_7}{J_{Z7}} \cdot \frac{\partial M_7}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,20609} \frac{M_8}{J_{Z8}} \cdot \frac{\partial M_8}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,4434} \frac{M_9}{J_{Z9}} \cdot \frac{\partial M_9}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,19722} \frac{M_{10}}{J_{Z10}} \cdot \frac{\partial M_{10}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,35185} \frac{M_{11}}{J_{Z11}} \cdot \frac{\partial M_{11}}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,7767} \frac{M_{12}}{J_{Z12}} \cdot \frac{\partial M_{12}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,1973} \frac{M_{13}}{J_{Z13}} \cdot \frac{\partial M_{13}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,71817} \frac{M_{14}}{J_{Z14}} \cdot \frac{\partial M_{14}}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,24767} \frac{N_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,17258} \frac{N_2}{S_2} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,76037} \frac{N_3}{S_3} \cdot \frac{\partial N_3}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,4248} \frac{N_4}{S_4} \cdot \frac{\partial N_4}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,2382} \frac{N_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,60495} \frac{N_6}{S_6} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,0434} \frac{N_7}{S_7} \cdot \frac{\partial N_7}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,20609} \frac{N_8}{S_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,4434} \frac{N_9}{S_9} \cdot \frac{\partial N_9}{\partial F_{dx}} dx + \\
& + \int_0^{0,19722} \frac{N_{10}}{S_{10}} \cdot \frac{\partial N_{10}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,35185} \frac{N_{11}}{S_{11}} \cdot \frac{\partial N_{11}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,7767} \frac{N_{12}}{S_{12}} \cdot \frac{\partial N_{12}}{\partial F_{dx}} dx + \\
& \left. + \int_0^{0,1973} \frac{N_{13}}{S_{13}} \cdot \frac{\partial N_{13}}{\partial F_{dx}} dx + \int_0^{0,71817} \frac{N_{14}}{S_{14}} \cdot \frac{\partial N_{14}}{\partial F_{dx}} dx \right) = 4,76 \text{ mm} \quad (163)
\end{aligned}$$

Vodorovný posuv v místě D je tedy roven 4,76 mm ve směru působící síly F_{dx} .

8.8. Numerický přístup MKP

V samotném závěru této kapitoly opět porovnáme hodnoty z analytického řešení s výsledky, které jsme získali numerickým přístupem za použití metody konečných prvků a výpočetního programu ANSYS Workbench 14.5. Postup numerické analýzy se od prvního zátěžného stavu prakticky nemění. Výjimkou zůstává zavedení okrajových podmínek hned na začátku numerického řešení, neboť rozložení sil a momentů vnějšího zatížení je při tomto zatěžovacím módu pochopitelně poněkud odlišné.

Následující obrázek ukazuje celkovou deformaci jednotlivých prutů výpočtového modelu. Avšak zde vzniká nepřesnost ve výsledném zobrazení, neboť program ANSYS nepočítá s porušením či s celkovým oddělením trubek v přední části konstrukce rámu dvojkola.



Obr. 64: Deformace prutů u 2. zátěžného stavu

Další obrázek č. 65 zobrazuje směrové napětí tedy tahové respektive tlakové napětí. Vykreslení tohoto napětí nám tak dává možnost ověřit správnost analytického výpočtu tím, že průběh směrového napětí porovnáme s výsledky napětí v jednotlivých bodech prutové soustavy z analytického řešení. Taktéž můžeme zkontrolovat znaménka, pokud zmíněný průběh srovnáme s grafickým znázorněním normálové složky VVÚ.

B: 2. Zatezny stav

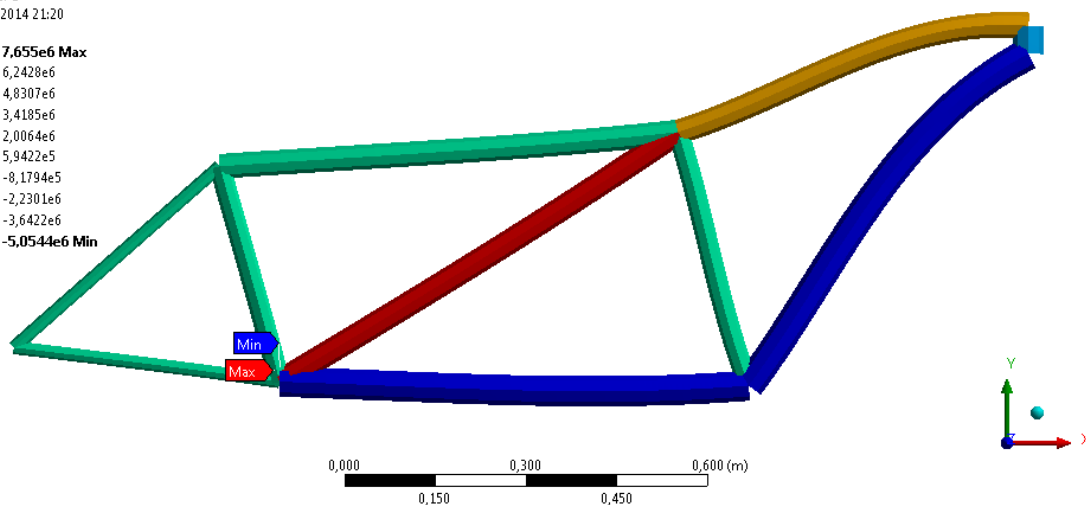
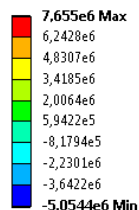
Direct Stress 2

Type: Direct Stress (Unaveraged)

Unit: Pa

Time: 1

28.5.2014 21:20



Obr. 65: Směrové napětí u 2. zátěžného stavu

Nakonec porovnáme celkové nominální napětí z analytického výpočtu s výsledným napětím získaným numerickým přístupem pomocí metody konečných prvků. Následující obrázek č. 66 vykresluje rozložení nominálního napětí v jednotlivých prutech prutové soustavy.

B: 2. Zatezny stav

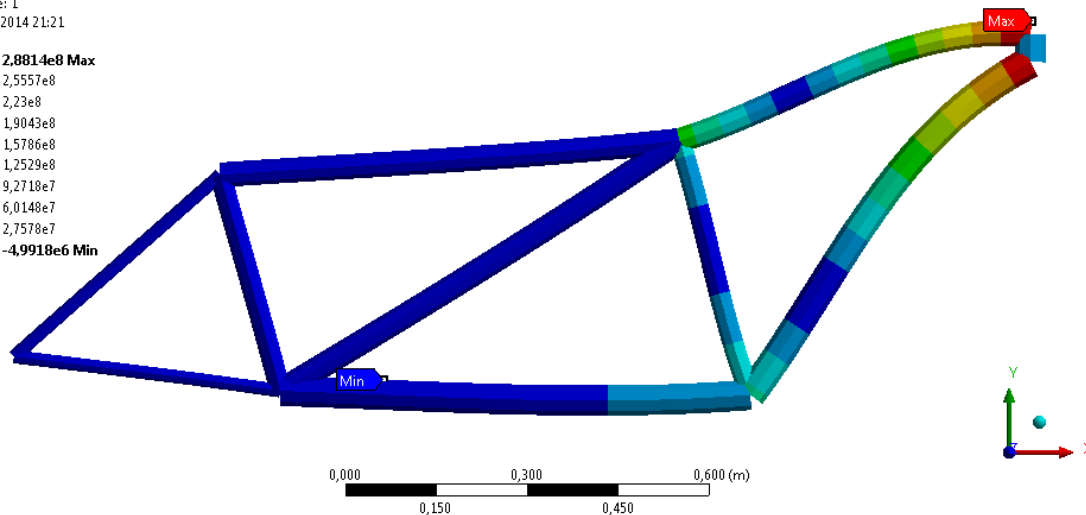
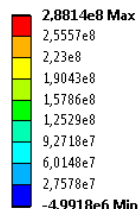
Maximum Combined Stress

Type: Maximum Combined Stress (Unaveraged)

Unit: Pa

Time: 1

28.5.2014 21:21



Obr. 66: Napětí v jednotlivých prutech během 2. zátěžného stavu

Lze vidět, že výsledky z numerického řešení jsou opět velmi podobné těm z analytického výpočtu za použití přístupu prosté pružnosti. Oblast s největší absolutní hodnotou napětí stejně jako podle analytického řešení představuje bod E, tedy spojení přední hlavové trubky s horní rámovou trubkou. Z toho důvodu pro dané místo provedeme srovnání obou hodnot nominálního napětí. Výpočtem pomocí prosté

pružnosti a pevnosti jsme zjistili celkové nominální napětí o velikosti 287,7673 MPa. Využitím metody konečných prvků byla v tomto bodě získána hodnota nominálního napětí rovna 288,14 MPa. Vzniklý rozdíl mezi výsledky z analytického výpočtu a numerického přístupu je velmi malý, proto jej můžeme považovat za nepodstatný.

9. NÁVRH ÚPRAVY RÁMOVÉ KONSTRUKCE

U druhého zátěžného stavu bylo zjištěno, že rám tandemového kola dané zatížení nevydrží. V okamžiku prudkého brzdění totiž dochází k překročení meze porušení či pevnosti materiálu hned ve dvou místech rámové konstrukce dvojkola a to takovým způsobem, že se přední část rámu tandemového kola zcela oddělí od zbylé rámové konstrukce. K porušení spojitosti materiálu dojde v danou chvíli na trubce s označením 6 v oblasti bodu E a na trubce označené číslem 14 v okolí bodu F. Horní rámová trubka se ještě plasticky deformuje v místě D, neboť bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti je v tomto bodě následující:

$$k_{MSP} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{max}} = \frac{280}{293,03197} = 0,95 \quad (164)$$

Z tohoto důvodu musíme vyztužit přední část rámové konstrukce a to buď změnou materiálu, kdy bychom slitinu hliníku nahradili například slitinou titanu s podstatně vyšší mezí kluzu a mezí pevnosti materiálu, nebo zvětšíme tloušťku zmíněných problémových trubek. Zde bude ukázán návrh úpravy konstrukce rámu, který spočívá právě ve zmenšení vnitřního průměru dvou uvedených trubek po celé jejich délce. Tím se tedy zesílí jejich tloušťka.

Místo trubky s označením 6 se použije jiná se stejným vnějším průměrem ale s vnitřním průměrem 34 mm. Trubku číslo 14 nahradíme trubkou s vnitřním průměrem 41 mm, přičemž vnější průměr a materiál zůstává opět zachován.

Po opětovném výpočtu celého druhého zátěžného stavu s novou vylepšenou geometrií rámu dvojkola byly znovu získány hodnoty napětí v nebezpečných místech, které představují všechny spojnice prutů výpočtového modelu. Jak se změnila velikosti daných napětí, ukazuje následující tabulka č. 10.

Tabulka 10: Nové hodnoty napětí v nebezpečných místech

Místo	Napětí od tahu / tlaku	Napětí od ohybu	Nominální napětí	Celkové napětí
i [-]	σ_N [MPa]	σ_o [MPa]	σ_{nom} [MPa]	σ_{max} [MPa]
C	-0,026	-5,6273	5,6533	11,3066
D	2,1266	55,9592	58,0858	116,1717
E	2,1266	-122,489	124,6159	249,2317
F	-1,0097	120,1346	121,1444	242,2887
I	-1,2298	-72,953	74,1828	148,3656
J	-4,5233	10,6813	15,2046	30,4091
K	-0,1048	-2,0774	2,1822	4,3644

V tabulce č. 10 můžeme vidět, že nejvíce namáhaným místem zůstává bod E avšak s výrazně menší hodnotou celkového napětí. Pro danou oblast nyní stanovíme bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti.

$$k_{MSP} = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{max}} = \frac{280}{249,2317} = 1,12 \quad (165)$$

Z výše určené bezpečnosti vyplývá, že vylepšení rámové konstrukce dvojkola bylo dostatečné a nyní už nedojde v žádném místě rámu ani k plastické deformaci, proto upravený rám tandemového jízdního kola při druhém zátěžném stavu vydrží.

Správnost analytického výpočtu si lze opět ověřit numerickým přístupem MKP.

C: Uprava konstrukce 2. stav

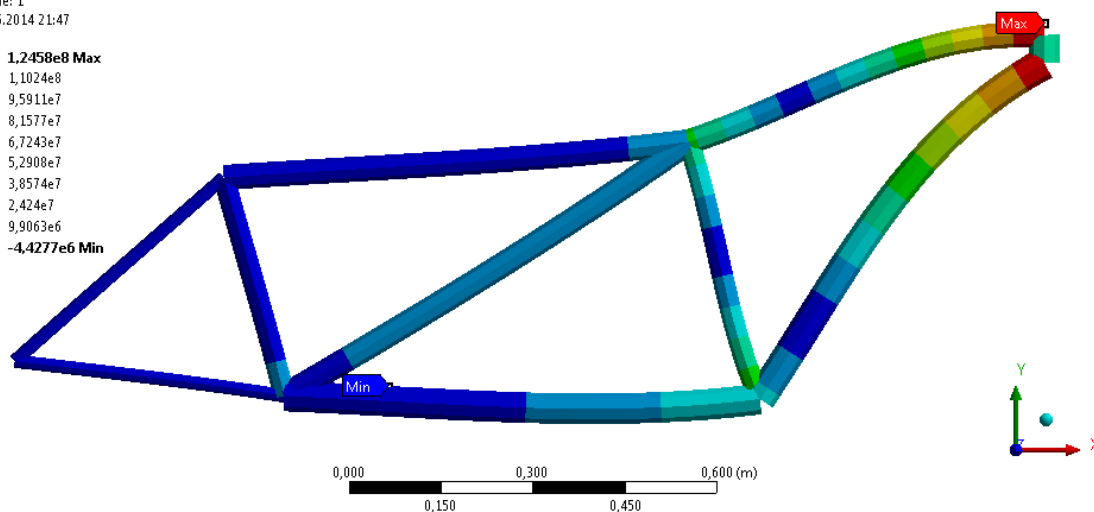
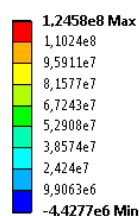
Maximum Combined Stress

Type: Maximum Combined Stress (Unaveraged)

Unit: Pa

Time: 1

28.5.2014 21:47



Obr. 67: Napětí v jednotlivých prutech

10. ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Pro napjatostní, deformační a bezpečnostní analýzu rámu tandemového jízdního kola byly vybrány dva zátěžné stavy. V prvním případě naše posádka pouze sedí na svém dvojkole, které zůstává v klidu. Nebezpečným místem se v tu chvíli stává spojení zadní sedlové trubky s horní rámovou trubkou, tedy námi označený bod C. O tom, že tento zátěžový mód daný rám vydrží, vypovídá stanovená bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti 3,51. Za účelem srovnání a určitého ověření analytického výpočtu bylo provedeno u obou zátěžných stavů řešení numerickým přístupem metodou konečných prvků ve výpočetním programu ANSYS Workbench 14.5. Výsledný rozdíl nominálních napětí v nejkritičtějších místech vyšel přibližně 0,9 MPa, z čehož vyplývá zanedbatelná odchylka 2 %. Podíváme-li se namátkově například do bodu F, kde je spojena přední hlavová trubka se spodní rámovou trubkou, najdeme hodnotu nominálního napětí 24,7 MPa získanou z analytického řešení. Dle obrázku č. 42 lze zhruba v daném místě vyčíst velikost napětí 26 MPa. Vzniklá odchylka se tak rovná 5 %. Z toho důvodu se výsledky z výpočtu za využití prosté pružnosti a pevnosti s hodnotami z numerické analýzy víceméně shodují a lze je považovat za relativně přesné.

V okamžiku prudkého brzdění přední brzdou, při kterém oba jezdci stojí a opírají se tak jen o svá řídítka a šlapátka, dochází k úplnému poškození spojitosti materiálu horní a spodní rámové trubky v místech, kde jsou obě trubky spojeny s přední hlavovou trubkou, tedy v bodech E a F. Abychom zhodnotili přesnost analytického výpočtu, porovnejme opět výsledné hodnoty nominálních napětí v daných bodech s numerickým řešením pomocí MKP. V prvním uvedeném místě E vznikl opět minimální rozdíl kolem 0,4 MPa s takřka nulovou odchylkou 0,1 %. V bodě F máme celkové nominální napětí z první varianty výpočtu o velikosti 285,2 MPa. Využitím metody konečných prvků v daném místě vychází maximální napětí 277 MPa viz obrázek č. 66. Z rozdílu obou hodnot plyne odchylka rovna 3 %. I v tomto případě nastává velmi dobrá shoda výsledných napětí, které byly zjištěny použitím dvou zmiňovaných metod řešení.

Jelikož během druhého zátěžného stavu se silně deformuje přední část rámu, byl vytvořen návrh na menší upravení rámové konstrukce dvojkola. Poté už by bezpečnost vyšla $k_{MSP} = 1,12$. I když po úpravě vychází hodnota celkového napětí těsně pod mezi kluzu dané slitiny hliníku, tak vylepšený rám tandemového kola již druhý způsob namáhání vydrží. K ověření správnosti výpočtu nových hodnot napětí v tabulce č. 10, bylo v programu ANSYS opět vykresleno napětí v jednotlivých prutech i pro tento případ viz obr. 67. V nejnebezpečnějším místě E lze vidět, že se od sebe velikosti daných napětí prakticky neliší. Ke stejnému závěru bychom došli, kdyby se provedlo stejné porovnání i v ostatních bodech výpočtového modelu rámové konstrukce dvojkola.

Nutno ještě podotknout, že jsem hodnoty napětí počítal s přesností na 4 desetinná místa z důvodu přesnějšího určení jednotlivých bezpečností a bližšího porovnání výsledků s numerickým řešením. Přesto si uvědomuji, že nelze tímto přístupem docílit tak přesných výsledků, které by odpovídaly skutečným hodnotám.

ZÁVĚR

Tato práce se zabývala deformačně napjatostní a bezpečnostní analýzou rámu horského tandemového kola. Analytický výpočet byl proveden využitím prosté pružnosti a pevnosti. Aby se dala tato metoda vůbec použít, musel se vytvořit zjednodušený výpočtový model rámové konstrukce dvojkola. Vznikla tedy prutová soustava, jež splňovala prutové předpoklady. Jelikož v každém prutu, jak je patrné z výsledných průběhů složek VVÚ, vzniká při daném zatěžování ohybový moment, bylo zapotřebí řešit danou úlohu jako uzavřený pevný rám a nikoliv styčnickovou metodou. Výpočet proběhl pro dva vybrané zátěžné stavy vzájemně se odlišující způsobem namáhání. V obou případech se jednalo o postupné statické zatížení. Po určení všech nejnebezpečnějších míst rámu dvojkola a stanovení příslušných bezpečností následovala analýza poddajnosti ve vybraných místech dané konstrukce. V důsledku poškození přední části rámu při namáhání během druhého zátěžného stavu, byl autorem práce navíc vytvořen návrh na vylepšení geometrie řešeného rámu dvojkola. Práce obsahuje také srovnání analytického řešení s numerickým přístupem pomocí metody konečných prvků. Zde byla zjištěna velmi dobrá shoda vypočtených hodnot.

Hlavní nevýhodou této analýzy představuje tvorba výpočtového modelu, při které zanedbáváme řadu podstatných věcí, jež mohou hrát významnou roli. Jedná se například o různé tvarové prvky, návarky, díry a vruby na rámových trubkách. Dalším důvodem proč se mohou vypočtené hodnoty od těch skutečných lišit, se stává způsob zatěžování. Během skutečné jízdy na dvojkole, je totiž daný rám namáhán dynamicky. To znamená, že se průběh zatížení v čase mění. Vzniká zde také nutnost posoudit bezpečnost rámové konstrukce vůči meznímu stavu únavy.

V současné době se více a více používá již zmíněné numerické řešení metodou konečných prvků a to především díky své mnohem vyšší rychlosti a jednoduchému uživatelskému prostředí. Lze tímto způsobem samozřejmě počítat i tvarově velmi složité prvky či konstrukce. Numerickým přístupem by byla řešitelná i skutečná nezjednodušená geometrie našeho tandemového rámu, avšak za účelem porovnání výsledků z analytického řešení se danou metodou analyzoval stejný výpočtový model.

Pro naši jednoduchou představu o celkové napjatosti a možnost posouzení správnosti získaných výsledků pomocí MKP, si přesto prostá pružnost a pevnost zachovává v oblasti mechaniky svou důležitost.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] NO QUESTION BIKE. No question bike: Zakázková výroba kol [online]. [cit. 2014-05-10]. Dostupné z: <http://www.noquestionbike.eu/cz/kompletni-kola/tandemova-kola---dvoukolo---dvojkola>
- [2] Aluminum alloys : 7020 aluminum [online]. [cit. 2014-05-10]. Dostupné z http://www.aubertduval.com/uploads/tx_obladystionproduit/7020_GB.pdf.
- [3] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VBRKA a Jiří Burša. Mechanika těles: pružnost a pevnost. 3. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [4] Pružnost a pevnost: Ing. Jana Horníková, Ph.D., Doc. RNDr. Pavel Šandera, CSc. (interaktivní opora). VUT v Brně: Fakulta strojního inženýrství [online]. [2002] [cit. 2014-05-11]. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/cpp.zip>
- [5] JANÍČEK, Přemysl. Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí. Vyd. 1. Brno: CERM, 2007, 682, [53] s. ISBN 978-80-7204-555-61.
- [6] NO QUESTION BIKE. No question bike: Zakázková výroba kol [online]. [cit. 2014-05-10]. Dostupné z: <http://www.noquestionbike.eu/cz/kompletni-kola/tandemova-kola---dvoukolo---dvojkola/mtb-29>
- [7] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. Mechanika těles: statika. Vyd. 7. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007, 182 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 978-80-214-3440-0.
- [8] PROF. RNDR. ING. JAN VRBKA, DRSC. PRUŽNOST A PEVNOST I: Učební text 280 s. [online]. [2012] [cit. 2014-05-17]. Dostupné (po přihlášení) z: <https://www.vutbr.cz/elearning/mod/resource/view.php?id=207264>
- [9] ČSN EN 755-8. ČESKÁ TECHNICKÁ NORMA: Hliník a slitiny hliníku - Lisované tyče, trubky a profily - Část 8: Trubky lisované komorovou matricí, mezní úchytky rozměrů a tvaru. 2000. vyd. Panenské Břežany: VÚK Panenské Břežany, s. r. o., 2000.
- [10] Turistika I: Úkol 9. MTB-dovednosti. Informační systém Masarykovy univerzity [online]. Brno, 2006 [cit. 2014-05-17]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/estud/fsps/js07/turistika/ch09.html>

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

PP	pružnost a pevnost
VVÚ	výsledné vnitřní účinky
MSP	mezní stav pružnosti
MKP	metoda konečných prvků

Veličina	Jednotka	Význam veličiny
R_m	[MPa]	mez pevnosti materiálu
$R_{p0,2}$	[MPa]	smluvní mez kluzu materiálu
E	[GPa]	modul pružnosti v tahu
N	[N]	normálová síla
T	[N]	posouvající síla
M_o	[Nm]	ohybový moment
W	[J]	energie napjatosti
F	[N]	síla působící v daném bodě
u	[mm]	posuv v daném bodě
φ	[rad]	natočení v daném bodě
F_{ri1}, F_{ri2}	[N]	síly působící na řídítka
F_{seY1}, F_{seY2}	[N]	svislé složky sil působící na sedátka
ρ	[°]	úhel, pod kterým působí síly na sedátka
F_{se1}, F_{se2}	[N]	síly působící na sedátka
F_{pe1}, F_{pe2}	[N]	síly působící na pedály
F_{za}	[N]	reakční síla na zadní kolo
F_{pr}	[N]	reakční síla na přední kolo
M_E	[Nm]	moment od předních řídítek působící v bodě E
M_{D1}, M_{D2}	[Nm]	momenty od přední sedlové trubky působící v místě D
M_C	[Nm]	moment od zadní sedlové trubky působící v bodě C
M_F	[Nm]	moment od přední vidlice působící v bodě F
v	[-]	počet možných použitelných podmínek
μ	[-]	počet nezávislých neznámých parametrů
s	[-]	stupeň statické určitosti
M_A	[Nm]	uvolněný vazebný moment působící v bodě A
M_B	[Nm]	uvolněný vazebný moment působící v bodě B
M_G	[Nm]	uvolněný vazebný moment působící v bodě G
M_H	[Nm]	uvolněný vazebný moment působící v bodě H
N_A	[N]	uvolněná vazebná normálová síla působící v bodě A
N_B	[N]	uvolněná vazebná normálová síla působící v bodě B
N_G	[N]	uvolněná vazebná normálová síla působící v bodě G
N_H	[N]	uvolněná vazebná normálová síla působící v bodě H
T_A	[N]	uvolněná vazebná posouvající síla působící v bodě A
T_B	[N]	uvolněná vazebná posouvající síla působící v bodě B
T_G	[N]	uvolněná vazebná posouvající síla působící v bodě G
T_H	[N]	uvolněná vazebná posouvající síla působící v bodě H

u_i	[mm]	posuv od normálových složek v daných bodech
w_i	[mm]	posuv od tečných složek v daných bodech
ϕ_i	[rad]	natočení od daných ohybových momentů v daných bodech
W_N	[J]	energie napjatosti pro prostý tah-tlak
W_M	[J]	energie napjatosti pro prostý ohyb
M_{oz}	[Nm]	ohybový moment ve směru osy z
F_{cx}	[N]	vodorovná složka síly působící do bodu C
F_{cy}	[N]	svislá složka síly působící do bodu C
F_{dx2}, F_{dx1}	[N]	vodorovné složky sil působících do bodu D
F_{dy2}, F_{dy1}	[N]	svislé složky sil působících do bodu D
F_{ex}	[N]	vodorovná složka síly působící do bodu E
F_{ey}	[N]	svislá složka síly působící do bodu E
F_{fy}	[N]	síla působící do bodu F
N_i	[N]	normálová síla v prutech
T_i	[N]	posouvající síla v prutech
M_i	[Nm]	ohybový moment v prutech
x	[m]	poloha řezu na prutu
S_i	[m ²]	obsah příčných průřezů jednotlivých prutů či trubek
J_{Zi}	[m ⁴]	osový kvadratický moment
W_{oi}	[m ³]	modul v ohybu
D_i	[m]	vnější průměr příčného průřezu jednotlivých trubek
d_i	[m]	vnitřní průměr příčného průřezu jednotlivých trubek
uN_A, uN_B	[mm]	posuv ve směru normálové síly N_A, N_B
uN_G, uN_H	[mm]	posuv ve směru normálové síly N_G, N_H
wT_A, wT_B	[mm]	posuv ve směru posouvající síly T_A, T_B
wT_G, wT_H	[mm]	posuv ve směru posouvající síly T_G, T_H
$\phi M_A, \phi M_B$	[rad]	natočení od momentu M_A, M_B
$\phi M_G, \phi M_H$	[rad]	natočení od momentu M_G, M_H
σ_{Ni}, σ_N	[MPa]	napětí od tahu-tlaku
σ_{oi}, σ_o	[MPa]	napětí od ohybu
α	[-]	součinitel koncentrace napětí
σ_{nom}	[MPa]	celkové nominální napětí
σ_{max}	[MPa]	celkové maximální napětí
k_{MSP}	[-]	bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti
uC_X	[mm]	vodorovný posuv v místě C
F_{g1}	[N]	gravitační síla působící na těžiště prvního cyklisty
F_{g2}	[N]	gravitační síla působící na těžiště druhého cyklisty
l_1, l_2	[m]	horizontální vzdálenosti těžišť obou jezdců
h_1, h_2	[m]	vertikální vzdálenosti těžišť obou jezdců
a_s	[m·s ⁻²]	celkové zpomalení dvoj kola
F_{Br}	[N]	brzdná síla
m_1	[kg]	hmotnost předního cyklisty
m_2	[kg]	hmotnost zadního cyklisty
a_{c1}, a_{c2}	[m·s ⁻²]	celková zrychlení působící na dvojici cyklistů

F_{c1}, F_{c2}	[N]	celkové síly způsobené každým jezdce
M_D	[Nm]	moment od přední sedlové trubky působící v bodě D
F_{ix}	[N]	vodorovná složka síly působící v bodě I
F_{iy}	[N]	svislá složka síly působící v bodě I
F_{jx}	[N]	vodorovná složka síly působící v bodě J
F_{jy}	[N]	svislá složka síly působící v bodě J
F_{dx}	[N]	vodorovná složka síly působící v bodě D
F_{dy}	[N]	svislá složka síly působící v bodě D
k_{P1}, k_{P2}	[-]	bezpečnost vzhledem k meznímu stavu porušení
u_{Dx}	[mm]	vodorovný posuv v místě D

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Tandemové kolo Active MTB 29 značky NO QUESTION [1]	12
Obr. 2: 3D vizualizace upraveného rámu tandemového jízdního kola	14
Obr. 3: Vždy kolmý průřez na střednici [4]	17
Obr. 4: Nehladká křivka [4]	17
Obr. 5: Rozdílná délka střednice [4]	17
Obr. 6: Staticky ekvivalentní náhrada [4]	18
Obr. 7: Hladkost střednice po zatížení [4].....	18
Obr. 8: Tah / Tlak [4]	18
Obr. 9: Ohyb [4].....	18
Obr. 10: Krut [4].....	19
Obr. 11: Smyk [4].....	19
Obr. 12: Prutová napjatost - pouze smykové a normálové napětí [4]	19
Obr. 13: Staticky ekvivalentní náhrada vnějšího silového působení [4].....	20
Obr. 14: Přehled mezních stavů [5].....	22
Obr. 15: Rozměry prutové soustavy.....	23
Obr. 16: Značení jednotlivých prutů a jejich spojů	24
Obr. 17: Souřadný systém	24
Obr. 18: Síly od zatížení posádkou a uvolněné reakční síly působící na dvojkolo.....	25
Obr. 19: Staticky ekvivalentní náhrada	26
Obr. 20: Částečné uvolnění	28
Obr. 21: Orientace sil a momentů	31
Obr. 22: Řez 1	31
Obr. 23: Řez 2	31
Obr. 24: Řez 3	32
Obr. 25: Řez 4	32
Obr. 26: Řez 5	33
Obr. 27: Řez 6	33
Obr. 28: Řez 7	34
Obr. 29: Řez 8	35
Obr. 30: Řez 9	36
Obr. 31: Řez 10	36
Obr. 32: Řez 11	37
Obr. 33: Řez 12	37
Obr. 34: Řez 13	38
Obr. 35: Řez 14	38
Obr. 36: Průběh normálových sil v prutech	52
Obr. 37: Průběh posouvajících sil v prutech	53
Obr. 38: Průběh ohybových momentů v prutech	53
Obr. 39: Vygenerovaná síť	57
Obr. 40: Deformace prutů u 1. zátěžného stavu	58
Obr. 41: Směrové napětí u 1. zátěžného stavu	58
Obr. 42: Napětí v jednotlivých prutech během 1. zátěžného stavu.....	59

Obr. 43: Síly působící na dvojkolo během 2. zátěžného stavu	60
Obr. 44: Síly od zatížení posádkou a působící reakční a brzdná síla na dvojkolo.....	62
Obr. 45: Staticky ekvivalentní náhrada.....	63
Obr. 46: Orientace sil a momentů	65
Obr. 47: Řez 1	66
Obr. 48: Řez 2	66
Obr. 49: Řez 3	66
Obr. 50: Řez 4	67
Obr. 51: Řez 5	67
Obr. 52: Řez 6	68
Obr. 53: Řez 7	69
Obr. 54: Řez 8	70
Obr. 55: Řez 9	70
Obr. 56: Řez 10	70
Obr. 57: Řez 11	71
Obr. 58: Řez 12	71
Obr. 59: Řez 13	72
Obr. 60: Řez 14	72
Obr. 61: Průběh normálových sil v prutech	77
Obr. 62: Průběh posouvajících sil v prutech	78
Obr. 63: Průběh ohybových momentů v prutech	78
Obr. 64: Deformace prutů u 2. zátěžného stavu	82
Obr. 65: Směrové napětí u 2. zátěžného stavu.....	83
Obr. 66: Napětí v jednotlivých prutech během 2. zátěžného stavu	83
Obr. 67: Napětí v jednotlivých prutech	85

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Hodnoty sil a momentů vstupující do výpočtu	30
Tabulka 2: Průřezové charakteristiky prutů	40
Tabulka 3: Vnitřní vazebné síly v prutech	51
Tabulka 4: Výsledné vnitřní účinky	52
Tabulka 5: Napětí v nebezpečných místech	55
Tabulka 6: Hodnoty sil a momentů vstupující do výpočtu	65
Tabulka 7: Vnitřní vazebné síly v prutech	76
Tabulka 8: Výsledné vnitřní účinky	77
Tabulka 9: Napětí v nebezpečných místech	79
Tabulka 10: Nové hodnoty napětí v nebezpečných místech	85

SEZNAM POUŽITÉHO SOFTWARE

- Microsoft Office Word 2010
- Microsoft Office PowerPoint 2010
- Maple 13
- Mathcad 14
- ANSYS Workbench 14.5

SEZNAM PŘÍLOH

I. CD-ROM

- Elektronická verze bakalářské práce